II osa lk. 69 KORDAMISÜLESANDED

Ülesanne 1

Lahenda võrrandid ja võrratused.

a) $5 \cdot 0{,}6^{2x} - 8 \cdot 0{,}6^{x} + 3 = 0$

Lahendus. Teeme muutujavahetuse $0{,}6^{x} = u$.

$5u^{2} - 8u + 3 = 0 \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = 0{,}6$

$0{,}6^{x} = 1 \Rightarrow x = 0$

$0{,}6^{x} = 0{,}6 \Rightarrow x = 1$

Kontroll teosta lähtevõrrandisse.

Vastus. $x_1 = 0 \; ja \; x_2 = 1$

b) $\log_4(3x-1) - 2 = 0$

Lahendus. Kasutame logaritmi definitsiooni.

$\log_4(3x-1) = 2 \Leftrightarrow 3x - 1 = 4^2 \Rightarrow x = 5\frac{2}{3}$

Kontroll teosta lähtevõrrandisse.

Vastus. $x = 5\frac{2}{3}$.

c) $\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 0$

Lahendus. Kasutame koosinuse kahekordse nurga trigonomeetrilise funktsiooni valemit.

$-(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) = 0 \Rightarrow -\cos 2 \cdot \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\arccos 0 + 2n\pi, n \in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$

Leiame erilahendid lõigul ja kontrollime lahendit.

Kui n = 0, siis $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

$vp = \sin^2\frac{\pi}{4} - \cos^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$

$pp = 0, vp = pp$

Vastus.Lõigul $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ on lahendid $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

d)

$\left(\frac{1}{9}\right)^{9+x} = 81$

$9^{-x-9} = 9^2$

$-x - 9 = 2$

$-x = 9 + 2$

$x = -11$

e)

$$6^x \geq \frac{1}{36}$$

$$6^x \geq 6^{-2}$$

$$x \geq -2$$

ehk $x \in [-2; \infty[$

f)

$$\log_8 x \leq \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \end{cases}$$

Lahend. $x \in]0; 2]$

Ülesanne 2

Leia piirväärtused

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-5)}{x} = -5$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}} = \frac{1-5}{2-\sqrt{1-1}} = \frac{-4}{2} = -2$$

Ülesanne 3

Leia joone $y = \frac{2}{x}$ puutuja võrrand punktis (-2;-1). Leia puutuja tõusunurk.

Lahendus. Puutujavõrrand on $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, kus puutepunkt on $P(x_0; y_0)$.

Leiame $y = \frac{2}{x}$ tuletise kohal –2.

$$y' = -\frac{2}{x^2},\ f'(-2) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Puutuja võrrand punktis $P(-2;-1)$ on $y + 1 = -\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Arvutame puutuja tõusunurga.

$\tan\alpha = k = f'(x_0)$

$\tan\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan(-0{,}5)$

Tõusunurk on $153^\circ 26'$

Vastus. Puutuja võrrand on $y = -\frac{1}{2}x - 2$ *ja tõusunurk on* $153^\circ 26'$.

Ülesanne 4

Leia geomeetrilise jada viis esimest elementi, kui $a_1 - a_5 = -12$ ja $a_2 + a_4 = 8$.
Lahendus. Koostame võrrandisüsteemi geomeetrilise jada esimese elemendi ja jada teguri suhtes.

$$\begin{cases} a_1 - a_5 = -12 \\ a_2 + a_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_1q^4 = -12 \\ a_1q + a_1q^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1-q^4) = -12 \\ a_1q(1+q^2) = 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^2)(1+q^2)}{a_1q(1+q^2)} = -\frac{12}{8}$$

$$\frac{(1-q^2)}{q} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2q^2 - 3q - 2 = 0,\ q_1 = 2\ ja\ q_2 = -0{,}5.$$

Vastavad esmesed liikmed on $a_1 = \frac{4}{5}\ ja\ a_1 = -\frac{64}{5} = -12\frac{4}{5}$.

Kontroll näitab, et mõlemad jadad rahuldavad ülesande tingimusi.

Vastus. Need elemendid on $\frac{4}{5};\frac{8}{5};\frac{16}{5};\frac{32}{5};\frac{64}{5};.....või\ -\frac{64}{5};6\frac{2}{5};-3\frac{1}{5};1\frac{3}{5};-\frac{4}{5};.......$

Ülesanne 5

Kontrolli, kas jada -6 ; -1 ; 4; 9; 14; ..... on aritmeetiline jada. Jaatava vastuse korral leia jada vahe ja kolmekümnes liige ning esimese kolmekümne liikme summa.

Lahendus. Kontrollime esmalt jada vahe olemasolu.

$d = - -1 - (-6) = 4 - (-1) = 9 - 4 = ... = 5$

Tegemist on aritmeetilise jadaga. Leiame nüüd kolmekümnes liige ning esimese kolmekümne liikme summa.

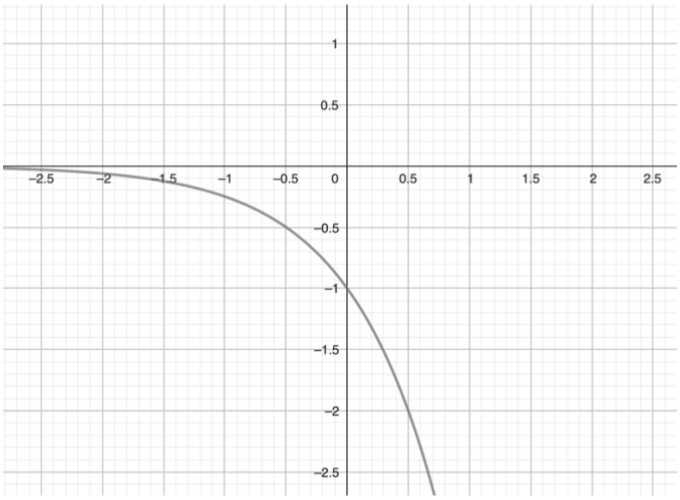
$a_{30} = -6 + 29 \cdot 5 = 139$

$S_{30} = \frac{-6 + 139}{2} \cdot 30 = 1995$

Vastus. See on aritmeetiline jada vahega 5 ning kolmekümnes liige on 139 ja esimese kolmekümne liikme summa on 1995.

Ülesanne 6

Skitseeri funktsiooni $y = -4^x$ graafik ja uuri selle abil funktsiooni.



Funktsiooni uurimine

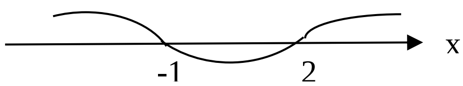
1) Määramispiirkond $X = R$
2) Muutumispiirkond $Y =]-\infty;0[$
3) Positiivsuspiirkond pudub, $X_+ = \varnothing$
4) Negatiivsuspiirkond $X_- = R$
5) Kasvamisvahemik puudub, $X\uparrow = \varnothing$
6) Kahanemisvahemik $X\downarrow = R$
7) Ekstreemumid puuduvad
8) Funksioon ei ole paaris – ega paaritufuksioon, sest ta pole sümeetilneei y – telje ega koordinaatide alguspunki suhtes

Ülesanne 7

a) Leia funktsiooni $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ määramispiirkond.

Lahendus. Määramispiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse.

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) \geq 0$$



$X =]-\infty;1] \cup]2;\infty[$

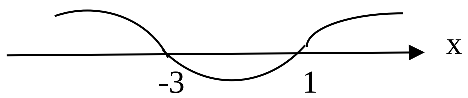
Vastus. Määramispiirkond on $X =]-\infty;1] \cup]2;\infty[$.

b) $y = \log\left(x^2 + 2x - 3\right)$

Kuna logaritmitav peab olema positiivne, siis

$x^2 + 2x - 3 > 0$

Avaldise nullkohad on Vietei tgeoreemi kohaselt $x_1 = -3$ *ja* $x_2 = 1$.



Määramispiirkond on $X =]-\infty; -3[\cup]1; \infty[$.

c) $y = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + \log_2 x$

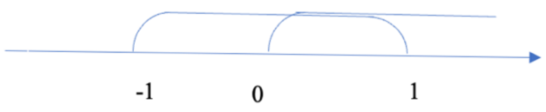
Kuna murrunimetaja ei tohi olla 0 ja juurealune avaldis peab olema mittenegatiivne ning logaritmitav peab olema positiivne, siis saame määramispiirkonna jaoks tingimused

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Ruutvõrratuse lahendiks saame

$x \in]-1; 1[$

Määramispiirkonna leidmiseks leiame võrratuste lahendite ühisosa $L_1 =]-1; 1[$ ja $L_2 =]0; \infty[$



Vastus. Määramispiirkond on $X =]0; 1[$.

Ülesanne 8

Leia funktsiooni $y = -x^3 + 3x^2$ ekstreemumpunktid.
Lahendus. Leiame funksiooni tuletise.
$y' = (-x^3 + 3x^2)' = -3x^2 + 6x$
Lahendame võrrandi.
$y' = 0$
$-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(-x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$
Märgiuuring tuletise nullkohtade ümbuses lubab väita, et kohal 0 omab funktsioon miinimumi ja kohal 2 maksimumi.
Teise võimalusena saab kasutada teist tuletist.
Arvutame funktsiooni väärtused neil kohtadel.
$y(0) = 0$
$y(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 = 4$
Vastus. Ekstreemumpunktid on $E_{\min}(0;0)$, $E_{\max}(2;4)$.

Ülesanne 9

Hääbuva geomeetrilise jada summa on –1 ning tema kolme esimese liikme summa on $-\frac{7}{8}$. Leia selle jada kuue esimese liikme summa.

Lahendus. Hääbuva geomeetrilise jada summa valem on $S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Järelikult $-1 = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow a_1 = q - 1$.

$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = -\frac{7}{8}$

$a_1(q^2 + q + 1) = -\frac{7}{8}$

$(q-1)(q^2 + q + 1) = -\frac{7}{8} \Rightarrow q^3 - 1 = -\frac{7}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

Kuue esimese liikme summa leidmiseks kasutame geomeetrilise jada summa valemit.

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$

$S_6 = \frac{-0{,}5 \cdot (0{,}5^6 - 1)}{0{,}5 - 1} = -\frac{63}{64}$

Vastus. Jada kuue esimese liikme summa on $-\frac{63}{64}$.

Ülesanne 10

Kinnine tsistern mahutab 6280 l vett. Millised peavad olema selle tsisterni kõrgus ja põhja raadius, et valmistamiseks kuluks minimaalselt materjali?

Lahendus.
Tähistame tsisterni raadius r (m) ja kõrguse H (m). Tsisterni ruumala V = 6,28 (m^3).

$$V=\pi r^2 H$$

$$\pi r^2 H=6,28 \Rightarrow H=\frac{6,28}{\pi r^2}$$

Moodustame pindala funktsiooni

$$S(r)=2\pi r^2+2\pi r H$$

$$S(r)=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{6,28}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{12,56}{r}$$

$$S'(r)=4\pi r-\frac{12,56}{r^2}$$

$$4\pi r-\frac{12,56}{r^2}=0 \Big| \cdot r^2\neq 0$$

$$4\pi r^3-12,56=0$$

$$4\pi r^3=12,56 \Big|: 4\pi$$

$$r^3\approx 12,56$$

$$r\approx 1(m)$$

Kontrollime ekstreemumi olemasolu teise tuletise abil.

$$S''(r)=4\pi+\frac{25,12}{r^3}$$

$$S''(1)=4\pi+\frac{25,12}{1^3}=4\pi+25,12>0\Rightarrow \text{on miinimumkoht}$$

Leiame tsisterni kõrguse

$$H=\frac{6,28}{\pi\cdot 1^2}\approx 2(m)$$

Vastus. Tsisterni raadius on ligikaudu 1 m ja kõrgus 2 m.

Ülesanne 11

Katuse-Karlssonil on kapis 30 saiakest. Neist 70% on kaneelirullid ja ülejäänud on kuklid. Kaneelirullidest $\frac{2}{3}$ on rosinatega ja ülejäänud ilma.

1. Karlsson võtab kapist juhuslikult 4 saiakest. Leia tõenäosus, et
   a) Karlsson saab ainult rosinatega kaneelirullid,
   b) Karlsson saab nii kaneelirulle kui ka kukleid võrdselt.
2. Karlsson toob endale Väikevenda külastades karamellkomme tõenäosusega 0,68. Leia tõenäosus, et kui Karlsson lendab Väikevenna juurde 9 korda, toob ta kompvekke rohkem kui 7 korral.

Lahendus.

Kaneelirulle on 0,7·30= 21 tk.
Rosinatega rulle on $\frac{2}{3} \cdot 21 = 14$ tk.
Kukleid on 30 – 21= 9 tk.

1.

a) Sündmus A- Karlsson võtab ainult rosinatega rulli.

Kõikide võimaluste arv $n = C_{30}^{4} = 27405$ ja soodsate võimaluste arv $m = C_{14}^{4} = 1001$.

Tõenäosus $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{1001}{27405} = \frac{143}{3915} \approx 0,037$.

b) Sündmus B- Karlsson saab kaneelirulle ja kukleid võrdselt.

Kõikide võimaluste arv $n = C_{30}^{4} = 27405$ ja soodsate võimaluste arv $m = C_{21}^{2} \cdot C_{9}^{2} = 210 \cdot 35 = 7560$.
Tõenäosus $p(B) = \frac{m}{n} = \frac{7560}{27405} = \frac{8}{29} \approx 0,276$.

2. Kasutame lahendamiseks Bernoulli valemit $p_{n,k} = C_n^{\,k} p^k q^{n-k}$, kus p = 0,68 ja q= 1-0,68= 0,32.

Sündmus C- kompvekke tuuakse rohkem kui 7 korral, st 8 või 9 korda.

$$p(C) = C_9^8 \cdot 0{,}68^8 \cdot 0{,}32^1 + C_9^9 \cdot 0{,}68^9 \cdot 0{,}32^0 \approx 0{,}163.$$

Vastus. Rosinatega rulle saab Karlsson tõenäosusega ligikaudu 0,037, kukleid ja rulle võrdselt tõenäosusega 0,276 ning see, et kompvekke tuuakse Väikevennale rohkem kui 7 korral, toimub tõenäosusega 0,163.

Ülesanne 12

Võimlemisrühmas on 9 liiget. Liikmete pikkused (sentimeetrites) on antud tabelis. Moodusta tunnuse *pikkus* variatsioonrida.

	Pikkus
Eva	159
Arvo	180
Kaarel	182
Sven	189
Tiia	165
Kaspar	172
Roosi	175
Triin	171
Tarvo	177

Leia a) keskväärtus,
b) mood,
c) mediaan,
d) standardhälve.

Lahendus.
Pikkuste variatsioonrida 159, 165, 171, 172, 175, 177, 180, 182, 189.
Keskväärtus

$$\bar{x} = \frac{159+165+171+172+175+177+180+182+189}{9} \approx 174,4(\,cm)\ .$$

Mood puudub.
Mediaani leiame mugavalt variatsioonreast ja see on 175 cm.
Standardhälbeks leiame esmalt hälbed

Pikkus	Hälve
159	15,4
165	9,4
171	3,4
172	2,4
175	0,6
177	2,6
180	5,6
182	7,6
189	14,6

a) Dispersioon $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{852,24}{8} = 815,3$ ja standardhälve $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 9\ (cm)$.

Ülesanne 13

Leia parabooli $y = -x^2 + 2x$ puutuja võrrand, kus puutuja tõus on 4.

Lahendus.
Leiame puutepunkti koordinaadid.

$$y' = \left(-x^2 + 2x\right)' = -2x + 2$$
$$-2x + 2 = 4$$
$$-2x = 2$$
$$x = -1 \Rightarrow x_0 = -1$$
$$y_0 = -(-1)^2 + 2\cdot(-1) = -1 - 2 = -3$$
$$P(-1; -3)$$

Puutuja võrrand on

$$y + 3 = 4(x + 1)$$
$$y = 4x + 1$$

Ülesanne 14

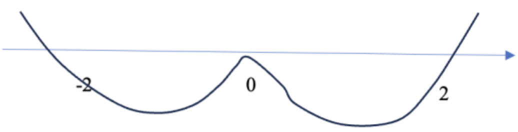
Leia funktsiooni $y = x^4 - 4x^2$

a) positiivsuspiirkond ja nullkohad

$$x^4 - 4x^2 = 0$$
$$x^2\left(x^2 - 4\right) = 0$$
$$x_{1,2} = 0,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2$$
$$X^0 = \{-2; 0; 2\}$$

Tingimus

$$X^+\ y > 0$$
$$x^2\left(x^2 - 4\right) > 0$$

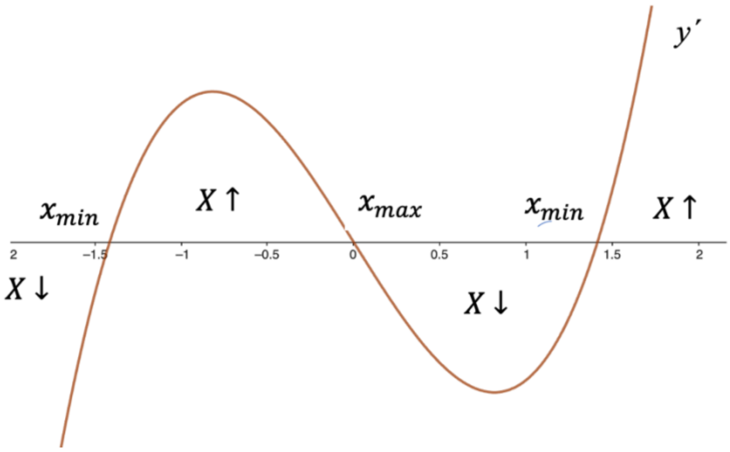


$$X^+ =]-\infty; 2[\cup]2; \infty[.$$

b) kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning ekstreemumpunktid.

Tingimused $X\uparrow y' > 0\ ja\ X\downarrow y' < 0$.

$$y' = 4x^3 - 8x$$
$$4x^3 - 8x = 0$$
$$4x\left(x^2 - 2\right) = 0$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_3 = \sqrt{2}$$



$X_1\uparrow = \left]-\sqrt{2};0\right[, X_2\uparrow = \left]\sqrt{2};\infty\right[, X_1\downarrow = \left]-\infty;-\sqrt{2}\right[, X_2\downarrow = \left]0;\sqrt{2}\right[$

Leiame ekstreemumpunktide oridnaadid.

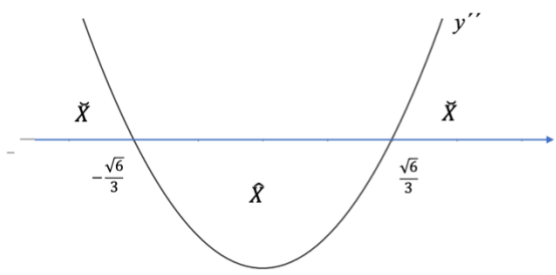
$$y_{min1} = \left(-\sqrt{2}\right)^4 - 4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2 = -4$$
$$y_{min2} = \left(\sqrt{2}\right)^4 - 4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = -4$$
$$y_{max} = 0^4 - 4\cdot 0^2 = 0$$

$$E_{min1}\left(-\sqrt{2};-4\right),\ E_{min2}\left(\sqrt{2};-4\right),\ E_{max}(0;0)$$

c) kumeruspiirkond ja käänupunktid

$$y'' = 12x^2 - 8$$
$$\widehat{X}\ y'' < 0$$
$$12x^2 - 8 < 0 \,|:12$$
$$x^2 - \frac{2}{3} < 0$$

$$Nullkohad\ on\ x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3},\ x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



Leiame käänupunktide ordinaadid ja koordinaadid

$$y_1 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^4 - 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = -2\frac{2}{9}$$

$$y_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = -2\frac{2}{9}$$

$$K_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; -2\frac{2}{9}\right),\ K_2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; -2\frac{2}{9}\right)$$

Antud funktsioon on paaris, kuna

$$f(x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)\ .$$