II osa lk. 65 HARJUTUSÜLESANDED

Ülesanne 1

Antud on funktsioon $y = x^3 - 0,5x^2 - 2x + 3$.

a) Leia funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

b) Leia funktsiooni maksimum ja miinimum.

c) Arvuta funktsiooni vähim väärtus lõigul [–2; 3].

d) Skitseeri funktsiooni graafik ja kontrolli tulemust mõne arvutiprogrammi (nt GeoGebra) abil.

Lahendus.

a) Leiame funktsiooni tuletise $y' = 3x^2 - x - 2$.

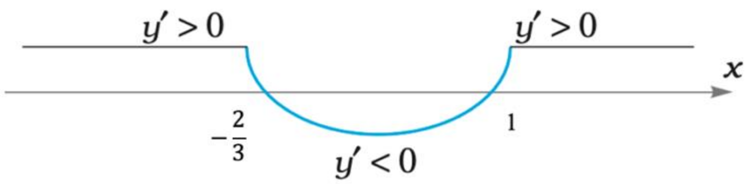
Tingimused funktsiooni kasvamiseks ja kahanemiseks on $X\uparrow \ \ y' > 0 \ \ ja \ \ X\downarrow \ \ y' < 0$.

Leiame tuletise nullkohad.

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{6} \quad x_1 = 1, \ x_2 = -\frac{2}{3}$$



Vastus. $X_1 \uparrow = \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[, X_2 \uparrow =]1; \infty[, X \downarrow = \left]-\frac{2}{3}; 1\right[$.

b) Määrame ekstreemumkohad eelmise punkti jooniselt. Maksimumkoht on funktsioonil kui kasvamine läheb üle kahanemiseks (tuletise märk muutub positiivsest negatiivseks) ja miinimumkoht, kui kahanemine läheb üle kasvamiseks (tuletis märk muutub negatiivsest positiivseks). Leiame funktsiooni ekstreemumid.

$$x_{max} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y_{max} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 0,5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = 3\frac{22}{27}$$

$$x_{min} = 1 \Rightarrow y_{min} = 1^3 - 0,5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1,5.$$

Vastus. Funktsiooni maksimum ja miinimum on $y_{max} = 3\frac{22}{27} \ ja \ y_{min} = 1,5$.

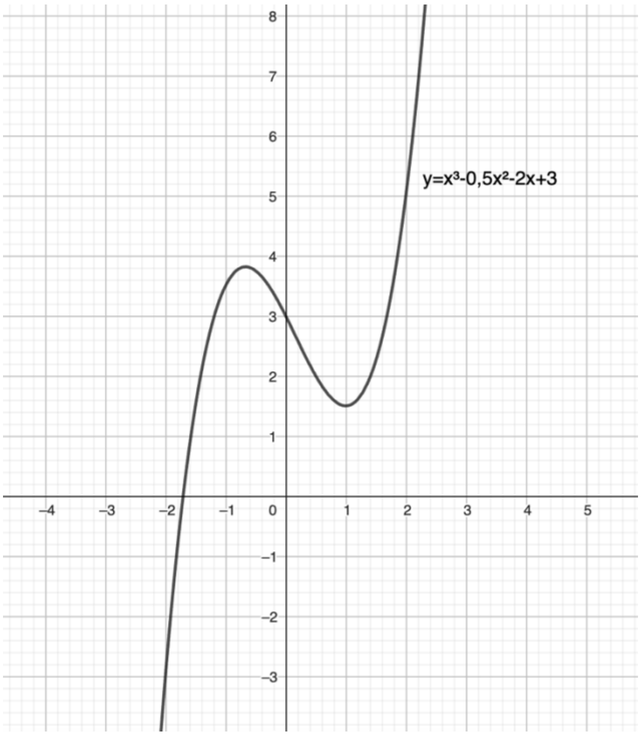
c) Leiame funktsiooni vähima väärtuse lõigul $[-2;3]$. Funktsiooni miinimumkoha määrasime eelmises alapunktis. Leiame nüüd funktsiooni väärtused lõigu otspunktides.

$$y(-2)=(-2)^3-0,5\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)+3=-3$$

$$y(3)=3^3-0,5\cdot 3^2-2\cdot 3+3=19,5$$

Seega vähimaks väärtuseks lõigul on y(-2) = -3.

d) Funktsiooni graafik.



Ülesanne 2

Millised peaksid olema risttahukakujulise pealt lahtise ja ruudukujulise põhjaga akvaariumi mõõtmed, kui tema ruumala oleks 500 l ning selle valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali?

Lahendus.

Risttahuka ruumala avaldub $V=a^2\cdot H\Rightarrow a^2\cdot H=500\Rightarrow H=\frac{500}{a^2}$.

Materjali kuluks moodustame pindala funktsiooni

$S(a)=a^2+4aH$

$$S(a)=a^2+4a\cdot\frac{500}{a^2}=a^2+\frac{2000}{a}$$

Leiame saadud funktsiooni miinimumkoha.

$$S'(a) = 2a - \frac{2000}{a^2}$$

$$2a - \frac{2000}{a^2} = 0 \,|\cdot a^2 \neq 0$$

$$2a^3 - 2000 = 0$$

$$2a^3 = 2000 \,|:2$$

$$a^3 = 1000$$

$$a = 10\ (dm)$$

Kontrollime, kas saadud tulemus on funktsiooni miinimumkoht.

$$S''(a) = \left(2a - \frac{2000}{a^2}\right)' = 2 + \frac{6000}{a^4}$$

$$S''(10) = 2 + \frac{6000}{10^4} = 2 + 0{,}6 = 2{,}6 > 0 \Rightarrow on\ miinimumkoht$$

Leiame akvaariumi kõrguse $H = \frac{500}{10^2} = 5(dm) = 0{,}5(m)$.
Akvaariumi põhjaks on ruut küljepikkusega 10 dm = 1 m.
Vastus. Akvaariumi mõõtmed on 1m, 1m, 0,5 m.

Ülesanne 3

RE1998 On antud funktsioon f(x) = x^2 - 2lnx + 3.

a) Leia $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$

Lahendus. $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\sqrt{e}\right)^2 - 2\ln\sqrt{e} + 3 = e - 2\cdot\frac{1}{2} + 3 = e + 2.$

b) Leia antud funktsiooni kasvamispiirkond.

Lahendus. Kasvamispiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse $f'(x) > 0$ ja arvestame, et määramispiirkond $X =]0;\infty[$.

$$\left(x^2 - 2\ln x + 3\right)' > 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 2}{x} > 0 \Leftrightarrow \left(2x^2 - 2\right)\cdot x > 0 .$$

Viimase võrratuse lahendamiseks kasutame intervallide meetodit. Võrratust rahuldavad $x \in]-1;0[\cup]1;0[$. Kasvamispiirkonna leidmisel arvestame veel asjaolu, et logaritm on määratud, kui logaritmitav on positiivne ehk lahendame võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} x(2x^2 - 2) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 2 > 0 \,|:2 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$$

Järelikult $X_{\uparrow} =]1;\infty[$.

c) Leia antud funktsiooni ekstreemumid.

Lahendus. Funktsiooni ekstreemumite leidmiseks lahendame võrrandi $f'(x) = 0$.

$$\frac{2x^2-2}{x}=0 \Rightarrow (2x^2-2)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

x = -1 ei kuulu määramispiirkonda. Kohal x = 1 omab funktsioon miinimumväärtust f(1) = 1 – 2ln1 + 3 = 4. Ekstreemumpunktiks on E_{min} (1; 4).

d) Lahenda võrrand f(x) = g(x), kus g(x) = $x^2 + \ln^2 x$.

Lahendus.

$$x^2-2\ln x+3=x^2+\ln^2 x \Rightarrow \ln^2 x+2\ln x-3=0 \Rightarrow \ln x=1\ ja\ \ln x=-3\ ning\ x_1=e\ ja\ x_2=\frac{1}{e^3}$$

Vastused. e + 2; x > 1; minimaalne väärtus on 4; $x_1=\frac{1}{e^3}$; $x_2=e$.

Ülesanne 4

RE1998 On antud funktsioon f(x) = sinx – cosx:

a) Lihtsusta avaldist f(x) · f(-x).

Lahendus.

$$(\sin x-\cos x)\cdot(\sin(-x)-\cos(-x))=(\sin x-\cos x)\cdot(-\sin x-\cos x)=-(\sin^2 x-\cos^2 x)=\cos 2x.$$

b) Lahenda võrrand f(x) = 1.

Lahendus. $\sin x-\cos x=1 \,|\, (\ )^2$

$$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1 \Rightarrow -2\sin x\cos x=0 \Rightarrow \sin x\cos x=0$$

1) $\sin x=0,\ x=n\pi,\ n\in Z$

2) $\cos x=0,\ \ x=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z$

Kontrollist selgub, et lähtevõrrandisse sobivad lahendid

$$x_1=\frac{\pi}{2}(4n+1);\ x_2=\pi(2n+1),\ n\in Z$$

c) Lahenda võrratus f(x) > 0 lõigus $[0;\pi]$.

Lahendus. $\sin x-\cos x>0$

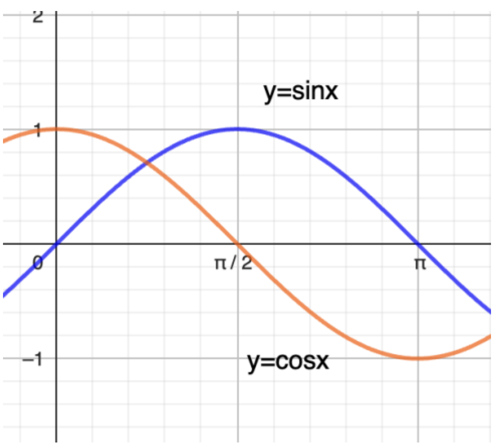
Lahenduseks võib skitseerida funktsioonide $y=\sin x$ ja $y=\cos x$ graafikud ühes ja samas koordinaatteljestikus ning seejärel lugeda sealt välja piirkond, kus funktsiooni $y=\sin x$ väärtused on suuremad, kui funktsiooni $y=\cos x$ väärtused lõigul $[0;\pi]$.

Samas võib lahendada ka homogeense trigonomeetrilise võrratuse.

$\sin x-\cos x>0$.

$$\sin x-\cos x=0 \Rightarrow \tan x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$$

Antud lõigule kuulub poollõik $\left]\frac{\pi}{4};\pi\right]$.



d) Leia antud funktsiooni miinimumkoht vahemikus $]0;2\pi[$ ja arvuta funktsiooni väärtus sellel kohal.

Lahendus. Miinimumkoha leidmiseks võib jällegi kasutada graafikut või siis lahendada võrrand $f'(x)=0$.

$$(\sin x-\cos x)'=0\Rightarrow \cos x+\sin x=0\Rightarrow \tan x=-1\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z.$$

Leiame antud vahemikku kuuluvad erilahendid

$Kui\ n=1,\ siis\ x=135°$

$Kui\ n=2,\ siis\ x=315°$

Kontrollime ekstreemumi olemasolu funktsiooni teise tuletise abil.

$f''(x)=-\sin x+\cos x$

$$f''(135°)=-\sin 135°+\cos 135°=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}<0\Rightarrow max$$

$$f''(315°)=-\sin 315°+\cos 315°=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}>0\Rightarrow min$$

Saime, et antud vahemikus on funktsiooni miinimumkohaks $x_{min}=315°=\frac{7\pi}{4}$.

Vastused. cos2x; $x_1=\frac{\pi}{2}(4n+1)$; $x_2=\pi(2n+1)$, $n\in Z$; $\left]\frac{\pi}{4};\pi\right]$; $x_{min}=315°=\frac{7\pi}{4}$.

Ülesanne 5

RE1997 Leia funktsiooni y = 2x + $\frac{2}{x-1}$

a) määramispiirkond

Lahendus: antud funktsioon ei ole määratud kohal 1.
Järelikult $X=R\setminus\{1\}$.

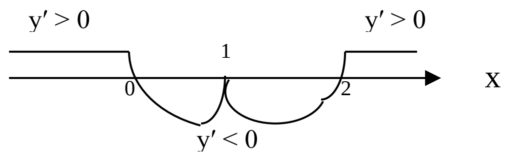
b) maksimum- ja miinimumpunktid

Lahendus. Lahendame võrrandi y′ = 0.

Leiame tuletise

$$y'=\left(2x+\frac{2}{x-1}\right)'=\left(2x+2(x-1)^{-1}\right)'=2-2(x-1)^{-2}\cdot 1=\frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=2,\ x_{3-4}=1$$



Kuna tuletise märk muutub kohal 0 plussist miinuseks(kasvamine läheb üle kahanemiseks), siis sel kohal on tegemist funktsiooni maksimumkohaga ja kuna tuletise märk muutub kohal 2 miinusest plussiks (kahanemine läheb üle kasvamiseks), siis sel kohal on tegemist funktsiooni miinimumkohaga. Ekstreemumpunktide leidmiseks arvutame funktsiooni väärtused kohtadel 0 ja 2.

$$y(0) = 2 \cdot 0 + \frac{2}{-1} = -2$$

$$y(2) = 2 \cdot 2 + \frac{2}{1} = 6$$

Ekstreemumpunktid on $E_{min}(2;\ 6)$ ja $E_{max}(0;\ -2)$.

c) kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

Lahendus.

$X\uparrow$, kus $y' > 0$

$X\downarrow$, kus $y' < 0$

Kasutame eelpool olevat tuletise märgikõverat.

$X_1 \uparrow =]-\infty;0[,\ X_2 \uparrow =]2;\infty[;\ X \downarrow =]0;2[\setminus \{1\}$.

Vastused.

$X = R \setminus \{1\}$; $E_{min}(2;6)$, $E_{max}(0;-2)$; $X_1 \uparrow =]-\infty;0[,\ X_2 \uparrow =]2;\infty[;\ X \downarrow =]0;2[\setminus \{1\}$.

Ülesanne 6

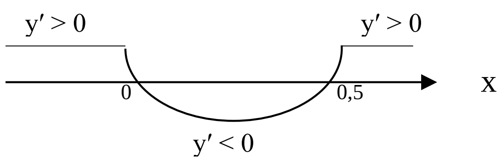
RE1999 Leia funktsiooni $y = 4x^3 - 3x^2$

a. maksimum- ja miinimumkohad

Lahendus. Lahendame võrrandi $y' = 0$.

Leiame tuletise $y' = 12x^2 - 6x$.

$12x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 6x(2x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ \ ja\ \ x_2 = 0{,}5$



Maksimum – ja miinimumkohad on $x_{max} = 0$ ja $x_{min} = 0{,}5$.

b) kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

Lahendus.

$X\uparrow$, kus $y' > 0$

$X\downarrow$, kus $y' < 0$

Saame eelmise punkti jooniselt

$X_1 \uparrow =]-\infty;0[,\ X_2 \uparrow =]0{,}5;\infty[;\ X \downarrow =]0;0{,}5[$

Vastused. $x_{max} = 0$; $x_{min} = 0{,}5$; $X_1 \uparrow =]-\infty;0[,\ X_2 \uparrow =]0{,}5;\infty[;\ X \downarrow =]0;0{,}5[$.

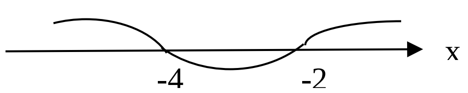
Ülesanne 7

Leia funktsiooni $y = \dfrac{x+4}{3x+6}$

a) positiivsuspiirkond ja kasvamisvahemikud.

Lahendus. Positiivsuspiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse $y > 0$.

$$\frac{x+4}{3x+6} > 0 \Leftrightarrow (x+4)(3x+6) > 0$$



$X^+ =]-\infty;-4[\cup]-2;\infty[$

Kasvamisvahemiku leidmiseks lahendame võrratuse $y' > 0$.
Leiame tuletise.

$$y' = \left(\frac{x+4}{3x+6}\right)' = \frac{3x+6-3x-12}{(3x+6)^2} = \frac{-2}{3(x+2)^2}$$

$$\frac{-2}{3(x+2)^2} > 0 \Rightarrow -2 \cdot 3(x+2)^2 > 0 \Rightarrow x \in \varnothing$$

$X \uparrow = \varnothing$

b) käänupunktid

Lahendus: käänupunktide leidmiseks lahendame võrrandi $y'' = 0$.
Selleks leiame funktsiooni y teise tuletise.

$$y'' = \left(\frac{x+4}{3x+6}\right)'' = \left(\frac{-2}{3(x+2)^2}\right)' = \frac{4}{3(x+2)^3}$$

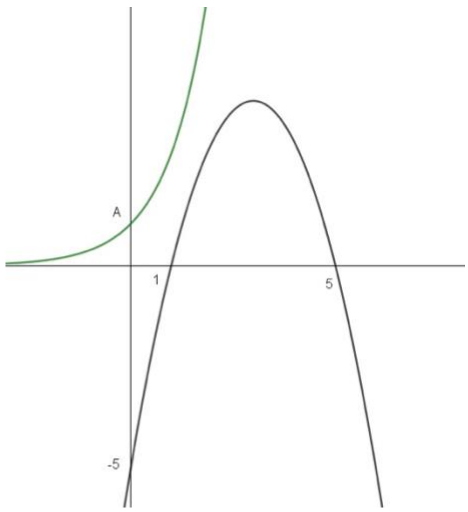
$$\frac{4}{3(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x \in \varnothing.$$

Käänupunktid puuduvad.
Vastused. $X^+ =]-\infty;-4[\cup]-2;\infty[$; $X \uparrow = \varnothing$, $X_k = \varnothing$

Ülesanne 8

RE1997 Joonisel on antud ruutfunktsiooni y = f(x) ja funktsiooni y = e^x graafikud. Leia

a) ruutfunktsiooni y = f(x) valem
b) punkti A koordinaadid
c) ruutfunktsiooni nullkohad ja haripunkt
d) y = e^x väärtus kohal, mis vastab funktsiooni y = f(x) absoluutväärtuselt vähimale nullkohale.
e) ühised positiivsuspiirkonnad.



a) ruutfunktsiooni y = f(x) valem

Lahendus. Leiame joniselt funktsiooni $y = f(x)$ graafiku nullkohad $X_0 = \{1;5\}$.
Leiame ruutfunktsiooni avaldises $y = ax^2 + bx + c$ kordajad a, b ja c.
Parabool läbib punkti (0, -5). Järelikult c = -5.
Kasutades Viete`i valemeid ning arvestades asjaolu, et parabooli harud avanevad alla, saame et a = -1 ja b = 6.
Saame ruutfunktsiooni valemiks $y = -x^2 + 6x - 5$.

b) punkti A koordinaadid

Kuna eksponentfunktsioon lõikab y- telge punktis (0;1), siis A(0;1). Kontrollime $y(0) = e^0 = 1$.

c) ruutfunktsiooni nullkohad ja haripunkt.

Ruutfunktsiooni nullkohad juba leidsime $X_0 = \{1;5\}$. Abstsissi arvutame näiteks valemist

$$x_h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot(-1)} = 3 \; ja \; y_h = -3^2 + 6\cdot 3 - 5 = 4$$

$H(3;4)$

d) funktsiooni $y = e^x$ väärtus kohal, mis vastab funktsiooni y = f(x) absoluutväärtuselt vähimale nullkohale

Lahendus. Absoluutväärtuselt vähim funktsiooni y = f(x) nullkoht on 1. Järelikult $y(1) = e^1 = e$.

e) ühine positiivsuspiirkond.

Jooniselt loeme, et mõlema funktsiooni ühine positiivsuspiirkond on $X^+ =]1;5[$
Vastused. $y = -x^2 + 6x - 5$; A(0;1); $X_0=\{1; 5\}$; H(3;4); e; $X^+ =]1;5[$

Ülesanne 9.

Olgu x_1 ja x_2 vastavalt funktsiooni $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 9a^2x + 1997$ miinimum- ja maksimumkohad. Milliste parameetri a väärtuste korral kehtib võrdus

$x_1^2 = x_2 + 10$?

Lahendus. Lahendame võrrandi $f'(x) = 0$.
Leiame tuletise

$$f'(x) = 3x^2 - 12ax + 9a^2 = 3(x^2 - 4ax + 3a^2).$$

$$3(x^2 - 4ax + 3a^2) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{2} = 2a \pm a$$

$x_1 = 3a \; ja \; x_2 = a.$

Ülesande tingimuste kohaselt

$x_{\min}^2 = x_{\max} + 10.$

1) kui $x_{\min} = 3a$, siis peab $f''(3a) > 0$.

$$f''(x) = \left(3(x^2 - 4a + 3a^2)\right)' = 6(x - 2a).$$

$$6(3a - 2a) > 0 \Rightarrow a > 0.$$

Määrame nüüd parameetri a. Selleks lahendame võrrandi.

$$(3a)^2 = a + 10 \Rightarrow 9a^2 - a - 10 = 0$$

$$a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+360}}{18}=\frac{1\pm 19}{18}\quad a_1=1\frac{1}{9}\quad ja\quad a_2=-1.$$

Viimane neist ei sobi, sest a>0. Järelikult $a=1\frac{1}{9}$.

2) kui $x_{\min}=a$, siis peab $f''(a)>0$.

$6(a-2a)>0\Rightarrow a<0.$

Määrame parameetri a. Selleks lahendame võrrandi

$$(a\ )^2=3a+10\Rightarrow a^2-3a-10=0.$$

$$a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm 7}{2}\quad a_1=5\quad ja\quad a_2=-2.$$

Esimene neist ei sobi, sest a<0. Seega on parameetri a teiseks otsitavaks väärtuseks –2.

Kui a = 0, siis funktsioon f(x) omandab kuju $f(x)=x^3+1997.$ Sellel funktsioonil ekstreemumpunkte ei ole (kohal x = 0 on käänupunkt).

Kontroll teosta iseseisvalt.

Vastus. Kui parameetri a väärtused on -2 *või* $1\frac{1}{9}$, siis kehtib funktsiooni $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 9a^2x + 1997$ miinimumkoha ja maksimumkoha vahel seos $x_{min}^2 = x_{max} + 10$.

Ülesanne 10

Leia funktsiooni $f(x)= px^2 - 9x + q$ ekstreemumpunktid, kui f(-3)= 28 ja f(1)= -32.

Lahendus. Leiame parameetrid p ja q. Selleks lahendame võrrandisüsteemi p ja q suhtes.

$$\begin{cases}(-3)^2\cdot p-9\cdot(-3)+q=28\\ p\cdot 1^2-9\cdot 1+q=-32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9p+q=1\\ p+q=-23\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=3\\ q=-26\end{cases}$$

Funktsioon f(x) omandab nüüd kuju $f(x)=3x^2-9x-26.$

Ekstreemumite leidmiseks lahendame võrrandi $f'(x)=0.$

Leiame tuletise.

$f'(x)=6x-9$

$6x-9=0\Rightarrow x=1{,}5.$

$f''(x)=6>0\Rightarrow x=1{,}5$ *on miinimumkoht*.

Leiame funktsiooni väärtuse antud kohal.

$f(1{,}5)=3\cdot(1{,}5)^2-9\cdot 1{,}5-26=-32{,}75.$

Järelikult miinimumpunkt on $E_{min}(1{,}5; -32{,}75)$.

Vastus. $E_{min}(1{,}5; -32{,}75)$.

Ülesanne 11

Leia funktsiooni $f(x) = 2x^3 + 1-3x(x + 4)$ minimaalne ja maksimaalne väärtus lõigus $[-3;3]$.

Lahendus. Minimaalse ja maksimaalse väärtuse leidmiseks tuleb lahendada võrrand $f'(x)=0.$

Leiame tuletise.

$f'(x)=\left(2x^3-3x^2-12x+1\right)'=6x^2-6x-12.$

$6x^2-6x-12=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=-1 \quad ja \quad x_2=2$

$f''(x)=12x-6,\ f''(-1)=-18<0 \Rightarrow x_1=-1$ *on maksimumkoht*

$f''(2)=18>0 \Rightarrow x_2=2$ *on miinimumkoht*

Minimaalsete ja maksimaalsete väärtuste leidmiseks arvutame funktsiooni väärtused neil kohtadel ja lisaks ka väärtused lõigu otspunktides.

$f(-1)=2\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)+1=8$

$f(2)=-19$

$f(-3)=-44$

$f(3)=-8$

Nagu näha, osutub minimaalseks väärtuseks –44 ja maksimaalseks väärtuseks 8.
Vastus. $y_{max}=8$; $x_{max}=-1$, $y_{min}=-44$, $x_{min}=-3$.

Ülesanne 12

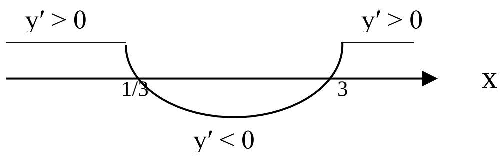
RE1999 On antud funktsioon $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 11$.

c) Leia selle funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud
Lahendus. Lahendame võrrandi $y' = 0$.

Leiame tuletise $y'=3x^2-10x+3$.

$3x^2-10x+3=0 \Rightarrow x_1=3\ ja\ x_2=\frac{1}{3}$

X↑, kus $y' > 0$
X↓, kus $y' < 0$



$X_1\uparrow=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[,\ X_2\uparrow=]3;\infty[;\ X\downarrow=\left]\frac{1}{3};3\right[$

d) Leia selle funktsiooni suurim väärtus lõigul $[0;5]$.

Lahendus.
$y''=6x-10,\ y''(3)=8>0 \Rightarrow x_1=3$ *on miinimumkoht*

$y''\left(\frac{1}{3}\right)=-8<0 \Rightarrow x_2=\frac{1}{3}$ *on maksimumkoht*

Maksimaalse väärtuse leidmiseks arvutame funktsiooni väärtuse kohal $\frac{1}{3}$ ja lisaks ka väärtused lõigu otspunktides.

$y\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\cdot\frac{1}{3}-11=-10\frac{14}{27}$

$y(0)=-11$

$y(5)=4$

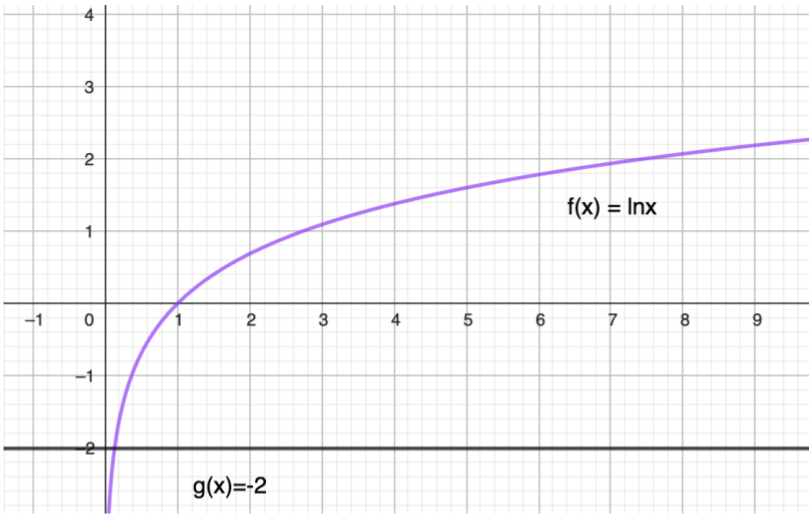
Suurimaks väärtuseks osutub 4.

Vastused. $X_1 \uparrow = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$, $X_2 \uparrow =]3;\infty[$; $X \downarrow = \left]\frac{1}{3};3\right[$, y = 4.

Ülesanne 13

RE1999 Antud on funktsioonid f(x) = lnx ja g(x) = -2.

1) Skitseeri ühes ja samas teljestikus nende funktsioonide graafikud.



2) a)Millistes punktides on nende funktsioonide väärtused võrdsed?

Lahendus. Mõlema funktsiooni väärtused on võrdsed, kui $f(x) = g(x)$.

$$\ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{e^2}$$

Järelikult on mõlema funktsiooni väärtused võrdsed punktis ($\frac{1}{e^2}$; -2).

b) Milliste argumendi x väärtuste korral on funktsiooni f(x) väärtused suuremad g(x) väärtustest?

Lahendus. Lahendame võrratuse $f(x) > g(x) \Rightarrow \ln x > -2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e^2}$.

e) Leia funktsiooni f(x) väärtus, kui x = $e^{\sin\frac{\pi}{3}}$.

Lahendus. $f\left(e^{\sin\frac{\pi}{3}}\right) = \ln\left(e^{\sin\frac{\pi}{3}}\right) = \ln e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vastused. (e^{-2}; -2); x > e^{-2}; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ülesanne 14

RE2000 On antud funktsioon f(x) = xlnx – xln5.

1) Leia funktsiooni

a) määramispiirkond

Lahendus. Määramispiirkonna leidmisel tuleb arvestada, et funktsioon on määratud, kui logaritmitav on positiivne. Järelikult $X =]0;\infty[$.

b) graafiku ja x- telje lõikepunkt

Lahendus. x- teljega lõikepunkti leidmiseks lahendame võrrandi $f(x) = 0$.

$x\ln x - x\ln 5 = 0 \Rightarrow x(\ln x - \ln 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \notin X \quad ja \quad \ln x = \ln 5 \Rightarrow x_2 = 5$.

$f(5) = 0$

Lõikepunkt x – teljega on $(5;0)$.

c) miinimumpunkti abtsiss

Lahendus. Miinimumpunkti abtsissi leidmiseks lahendame võrrandi $f'(x) = 0$.

Leiame tuletise.

$f'(x) = (x\ln x - x\ln 5)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - \ln 5 = \ln x + 1 - \ln 5$

$\ln x + 1 - \ln 5 = 0 \Rightarrow \ln x = \ln 5 - 1 \Rightarrow \ln x = \ln 5 - \ln e \Rightarrow \ln x = \ln\frac{5}{e} \Rightarrow x = \frac{5}{e}$.

Kontrollime, kas on tegemist miinimumkohaga. Selleks leiame teise tuletise.

$f''(x) = (x\ln x - x\ln 5)'' = (\ln x + 1 - \ln 5)' = \frac{1}{x}$

$f''\left(\frac{5}{e}\right) = \frac{e}{5} > 0$

Järelikult on funktsiooni miinimumpunkti abstsiss $x_{\min} = \frac{5}{e}$.

2) Koosta joone y = f(x) puutuja võrrand punktis, kus joon lõikab x- telge.

Lahendus. Puutuja võrrand $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, kus P(5; 0) on otsitava puutuja ja antud joone puutepunkt.

Kasutame eelmises punktis leitud tuletist

$f'(x) = \ln x + 1 - \ln 5$

$f'(5) = \ln 5 + 1 - \ln 5 = 1$

$y - 0 = 1 \cdot (x - 5) \Rightarrow y = x - 5$

Vastused. $X =]0;\infty[$; $(5;0)$; $x_{\min} = \frac{5}{e}$; $y = x - 5$

Ülesanne 15

RE2003 Antud on funktsioon y = $3x^3$ – x.

a) Leia funktsiooni nullkohad.

Lahendus. Nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi $y = 0$.

$3x^3 - x = 0 \Rightarrow x(3x^2 - 1) = 0$, $x_1 = 0$ ja $x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Järelikult $X_0 \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3};0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

b) Leia funktsiooni tuletis.

Lahendus. $y' = (3x^3 - x)' = 9x^2 - 1$.

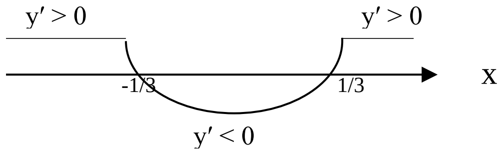
c) Leia funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

Lahendame võrrandi y′ = 0.

$9x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$ ja $x_2 = -\frac{1}{3}$

X↑, kus y′ > 0

X↓, kus y′ < 0



Järelikult $X_1\uparrow = \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$, $X_2\uparrow = \left]\frac{1}{3}; \infty\right[$; $X\downarrow = \left]-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right[$.

d) Leia funktsiooni maksimum - ja miinimumpunkti koordinaadid.
Lahendus. Kasutame eelmises punktis leitud tuletisfunktsiooni märgikõverat ja saame:

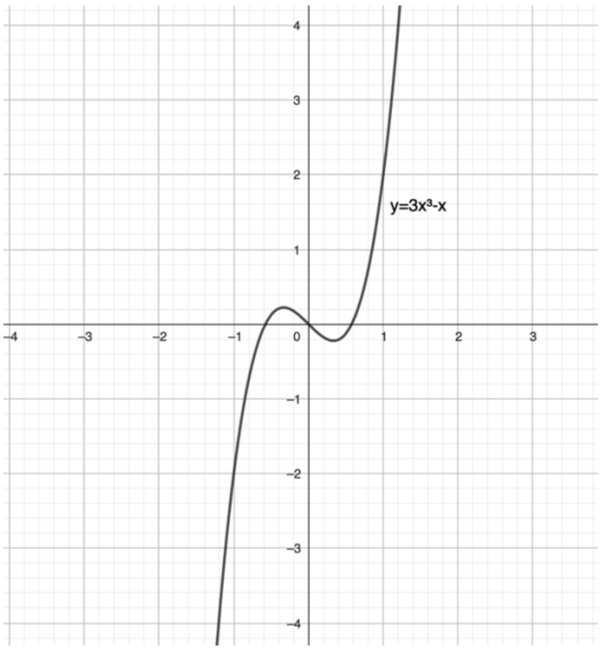
$x_{\max} = -\frac{1}{3}$ *ja* $x_{\min} = \frac{1}{3}$.

Arvutame ka vastavad funktsiooni väärtused.

$y\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, $\quad y\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3} = -\frac{2}{9}$

Järelikult $E_{\max}\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{9}\right)$ *ja* $E_{\min}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{9}\right)$.

e)Joonesta funktsiooni y = $3x^3$ – x graafik.
Skitseerime graafiku.

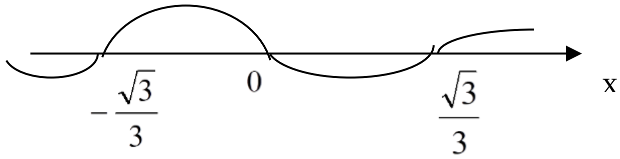


f) Kirjuta välja antud funktsiooni positiivsuspiirkond.

Lahendus. Lahendame võrratuse $y > 0$.

$3x^3 - x > 0 \Rightarrow x(3x^2 - 1) > 0$

Kasutame intervallide meetodit.



või loeme jooniselt positiivsuspiirkonna $X^{+} = \left]-\frac{\sqrt{3}}{3};0\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3};\infty\right[$.

Vastused.

$x \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3};0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}; y' = 9x^2 - 1; X_1\uparrow = \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[,\ X_2\uparrow = \left]\frac{1}{3};\infty\right[; X\downarrow = \left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right[;$

$E_{\max}\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{9}\right); E_{\min}\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{9}\right); X^{+} = \left]-\frac{\sqrt{3}}{3};0\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3};\infty\right[$.

Ülesanne 16

RE2004 On antud funktsioon y = x³ - 3x – 3.

a) Leia funktsiooni tuletis.

Lahendus. Leiame tuletise.

$y' = 3x^2 - 3$.

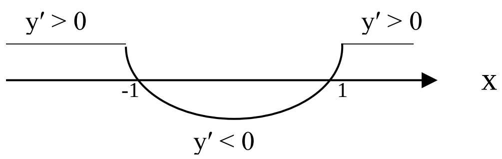
b) Leia funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

Lahendus. Lahendame võrrandi y′ = 0.

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1\ ja\ x_2 = 1$

X↑, kus y′ > 0

X↓, kus y′ < 0



Järelikult $X_1\uparrow =]-\infty;-1[,\ X_2\uparrow =]1;\infty[; X\downarrow =]-1;1[$.

c) Arvuta funktsiooni maksimum- ja miinimumpunkti koordinaadid.

Lahendus. Kasutame eelmises punktis leitud tuletisfunktsiooni märgikõverat ja saame

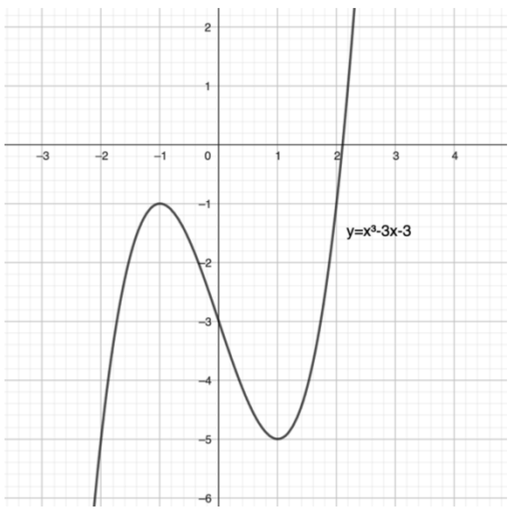
$x_{\max} = -1\ ja\ x_{\min} = 1$.

Arvutame ka vastavad funktsiooni väärtused.

$y(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) - 3 = -1, \quad y(1) = 1^3 - 3\cdot1 - 3 = -5$

Järelikult $E_{\max}(-1;-1)\quad ja\quad E_{\min}(1;-5)$.

d) Joonesta funktsiooni y = x³ - 3x – 3 graafik.



e) Koosta võrrand joone y = x³ - 3x – 3 puutujale punktis (2;-1).

Lahendus. Puutuja võrrand $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, kus P(2; -1) on otsitava puutuja ja antud joone puutepunkt.

$y'(2) = 3\cdot(2)^2 - 3 = 9$

$f'(2) = 9$

$y - 1 = 9\cdot(x-2) \Rightarrow y = 9x - 19$

Puutujavõrrand on $y = 9x - 19$.

Vastused.

$y' = 3x^2 - 3$; $X_1\uparrow =]-\infty;-1[$, $X_2\uparrow =]1;\infty[$; $X\downarrow =]-1;1[$; E_{max}(-1,-1); E_{min}(1;-5);

y = 9x – 19

Ülesanne 17

RE2004 Antud on funktsioon f(x) = $\cos^4$x – $\sin^4$x.

a) Lihtsusta funktsiooni avaldist.

Lahendus.

$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot 1 = \cos 2x$

$f(x) = \cos 2x$

b) Arvuta f(α) täpne väärtus, kui sinα = $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lahendus. $f(\alpha) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - 2\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

Järelikult $f(\alpha) = 0{,}6$.

c)Määra, kas f(x) on paaris- või paaritu funktsioon.

Lahendus. Funktsioon on paarisfunktsioon, kui $f(-x) = f(x)$ ja paaritufunktsioon, kui $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = \cos^4(-x) - \sin^4(-x) = \cos^4 x - \sin^4 x = f(x)$

Järelikult on funktsioon $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ paarisfunktsioon.

d) Lahenda võrrand f(x) = 0 lõigul $[0;2\pi]$.

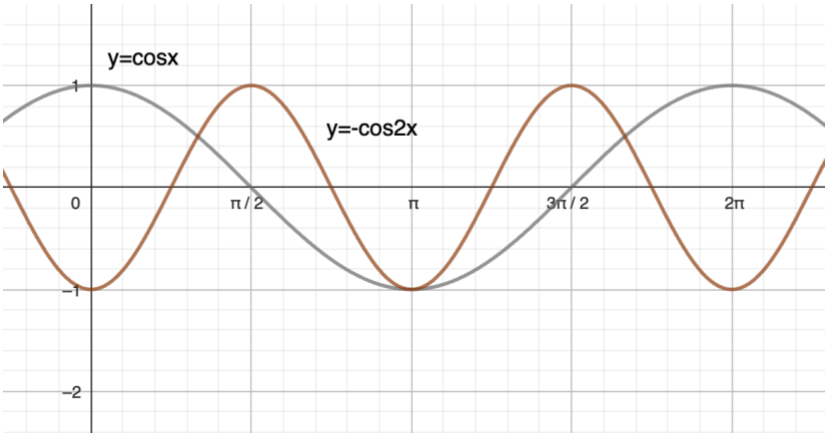
Lahendus.

$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pm\arccos 0 + 2n\pi,\ x = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$.

Andes täisarvule n erinevaid väärtusi arvutame erilahendid antud lõigul.

Lõigul $[0;2\pi]$ on lahenditeks $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{5\pi}{4}, x_4 = \frac{7\pi}{4}$.

e)Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide y = cosx ja y = -cos2x graafikud lõigul $[0;2\pi]$.



Vastused. y = cos2x; 0,6; paarisfunktsioon; $x \in \{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \}$

Ülesanne 18

RE2005 Antud on funktsioonid y = x³ - 4x ja y = x² - 1.

a) Arvuta funktsiooni $y = x^3 - 4x$ nullkohad ja maksimum- ning miinimumpunkti koordinaadid.

Lahendus. Leiame $y = x^3 - 4x$ nullkohad. Selleks lahendame võrrandi $y = 0$.

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$.

Järelikult nullkohtade hulk on $X_0 = \{-2;0;2\}$.

Leiame funktsiooni $y = x^3 - 4x$ tuletise ja lahendame võrrandi $y' = 0$.

$y' = (x^3 - 4x)' = 3x^2 - 4$

$$3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Määrame ekstreemumkohtade liigi näiteks teise tuletise abil.

$y'' = 6x$

$$y''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 0 \; ning \; y''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0$$

Seega $x_{max} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ *ja* $x_{min} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Leiame maksimum – ja miinimumpunktide ordinaadid.

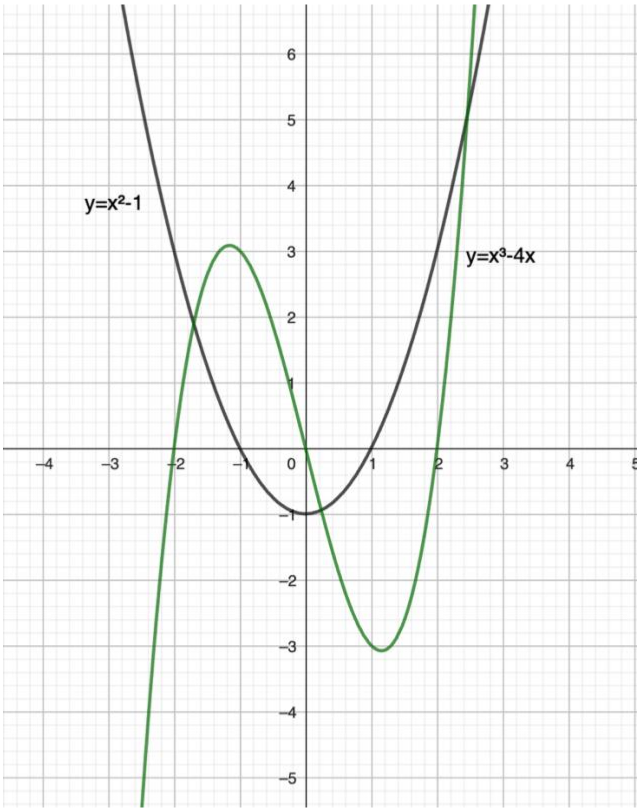
$$y\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

$$y\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

$$P_{max}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{16\sqrt{3}}{9}\right), P_{min}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$$

b) Joonesta funktsioonide $y = x^3 - 4x$ ja $y = x^2 - 1$ graafikud samas teljestikus.

Skitseerime graafikud.



c) Kirjuta välja vahemik, kus funktsioonid $y = x^3 - 4x$ ja $y = x^2 - 1$ kasvavad samaaegselt.

Lahendus. Funktsioonide $y = x^3 - 4x$ ja $y = x^2 - 1$ ühine kasvamisvahemik on $\left]\frac{2\sqrt{3}}{3};\infty\right[$.

Vastused. $\{-2;0;2\}$; $P_{\max}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$, $P_{\min}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$; $\left]\frac{2\sqrt{3}}{3};\infty\right[$.

Ülesanne 19