II osa lk. 52 HARJUTUSÜLESANDED

Ülesanne 1

Leia joone y = x^3 +1 puutuja võrrand punktis, mille abstsiss on 1. Tee joonis.
Lahendus. Puutuja võrrand $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

$x_0 = 1$, $y' = 3x^2$, $y'(1) = 3$.

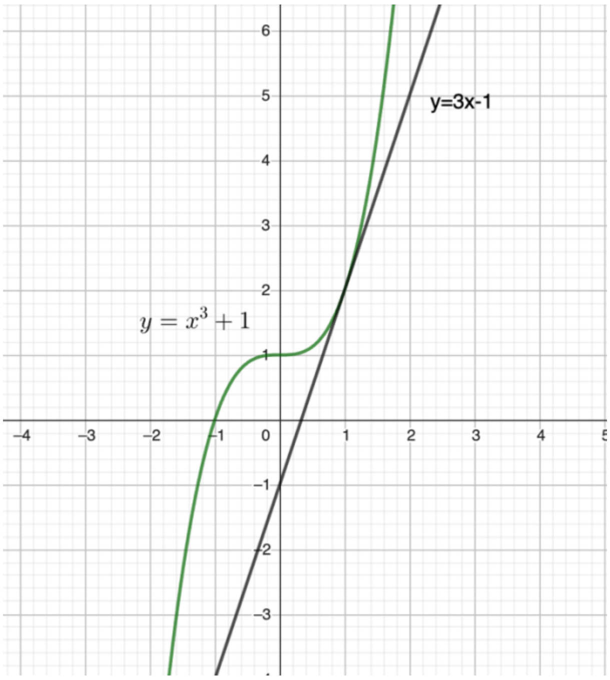
Leiame y_0.

$y(1) = 1^3 + 1 = 2 \Rightarrow y_0 = 2$.

Puutepunkt on P(1; 2).
Leiame puutuja võrrandi

$y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1$

Vastus. Puutuja võrrand on $y = 3x - 1$.



Ülesanne 2

Leia joone $y = \dfrac{x-1}{x}$ puutuja võrrand, kui see puutuja on paralleelne sirgega
8x - 2y + 1 = 0.
Lahendus. Puutuja võrrand $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Leiame tuletise $y' = \dfrac{1}{x^2}$.

Leiame sirge 8x - 2y + 1 = 0 tõusu, mis osutub ka antud joone $y = \dfrac{x-1}{x}$ puutuja tõusuks, kuna puutuja on sirgega paralleelne ning paralleelsete sirgete tõusud on võrdsed.

8x - 2y + 1 = 0 $\Rightarrow y = 4x + 0{,}5 \Rightarrow k = 4$.

$k = f'(x_0) = 4 \Rightarrow 4 = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow x_0 = \pm\dfrac{1}{2}$

Leiame y_0.

$$y_0 = \frac{0,5 - 1}{0,5} = 2\cdot(-0,5) = -1$$

$$y_0 = \frac{-0,5 - 1}{-0,5} = -2\cdot(-1,5) = 3$$

Puutepunktid on $P_1\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$ ja $P_2\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$.

Puutuja võrrandid

$$y+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y=4x-3$$

$$y-3=4\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y=4x+5$$

Vastus. Puutuja võrrandid on $y=4x-3\ ja\ y=4x+5.$

Ülesanne 3

Millises punktis on paraboolil y = x^2 + 4x x-teljega paralleelne puutuja?
Lahendus. Selleks, et parabooli y = x^2 + 4x puutuja oleks paralleelne x - teljega peab tõus

$k=f'(x_0)=0.$

leiame tuletise $y'=2x+4.$

Leiame puutepunkti abstsissi ja ordinaadi.

$0=2x+4\Rightarrow x_0=-2\ ja\ y_0=(-2)^2+4\cdot(-2)=-4$

Puutepunkt on P (-2; -4).
Vastus. Punkt, kus paraboolil y = x^2 + 4x on x – teljega paralleelne puutuja on P(-2;-4).

Ülesanne 4

Antud on joon y = x^3 + x - 2. Leia punktid, kus joone puutuja on sirgega y = 4x+5

a) paralleelne

Lahendus. Selleks, et parabooli y = x^3 + x - 2 puutuja oleks antud sirgega y = 4x+5 paralleelne peavad nende tõusud võrdsed olema. Järelikult puutuja tõus k = 4.
Leiame tuletise $y'=3x^2+1.$ Leiame puutepunktide abstsissid ja ordinaadid.

$k=f'(x_0)=4$

$4=3x^2+1\Rightarrow x_0=\pm1.\ y_0=1^3+1-2=0\ ja\ y_0=(-1)^3-1-2=-4.$

Vastus. Need punktid on A (1;0) ja B (-1; -4).

b) risti

Lahendus. Selleks, et parabooli y = x^3 + x - 2 puutuja oleks antud sirgega y = 4x+5 risti peavad nende tõusude korrutis olema –1.Järelikult parabooli puutuja tõus

$k=-\frac{1}{4}.$

Leiame puutepunktide abstsissid ja ordinaadid.

$k=f'(x_0)=-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}=3x^2+1\Rightarrow x^2=-\frac{5}{12}$

Kuna reaalarvude hulgas ei saa arvu ruut olla negatiivne, siis antud sirgega risti olevat puutujat ei eksisteeri.
Vastus. Punktid, kus parabool oleks antud sirgega risti puuduvad.

Ülesanne 5

RE2001 Antud on funktsioon f(x) = x^3 - 1. Leia

a) funktsiooni tuletis

Lahendus. $f'(x) = 3x^2$

Vastus. Funktsiooni tuletis on $f'(x) = 3x^2$.

b) funktsiooni graafiku punktid, milles puutuja tõus on 12.

Lahendus. Puutuja võrrand $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Leiame tuletise $y' = 3x^2$. Leiame puutepunktide abstsissid ja ordinaadid.

$k = f'(x_0) = 12$

$12 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 2.$ $y_0 = 2^3 - 1 = 7$ *ja* $y_0 = (-2)^3 - 1 = -9.$

Puutepunktid on A(2; 7) ja B(-2; -9).

Vastus. Puutepunktid on A(2; 7) ja B(-2; -9).

Ülesanne 6

RE2002 Antud on funktsioon y = $x^3 + 6x^2 + 9x$

a) Leia funktsiooni tuletis.

Lahendus. Funktsiooni tuletis on $y' = 3x^2 + 12x + 9.$

Vastus. Funktsiooni tuletis on $y' = 3x^2 + 12x + 9.$

b) Leia funktsiooni graafikule joonestatud puutuja tõus punktis, mille abstsiss on 0.

Lahendus. Puutuja võrrand $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, kus puutuja tõus on $k = f'(x_0)$.

Leiame tõusu. $k = f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 9 + 9 = 9.$

Vastus. Tõus on 9.

Ülesanne 7

On antud funktsioon $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Leia funktsiooni $f(x)$ kahanemisvahemik ja miinimumpunkti koordinaadid.

NB! Seda ülesannet oskad lahendada pärast järgmise teema (lk. 53-54) omandamist.

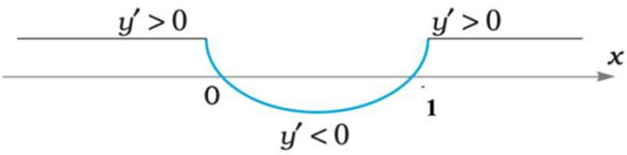
Lahendus. Leiame funktsiooni tuletise $y' = 6x^2 - 6x$.

Kahanemisvahemiku leidmiseks lahendame võrratuse

$6x^2 - 6x < 0$

$6x(x - 1) < 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1$



Vastus. Kahanemisvahemik on $X \downarrow =]0; 1[$

Funktsioonil on miinimumkoht, kus funktsiooni kahanemine läheb üle kasvamiseks ehk tuletise mark muutub negatiivsest positiivseks. Seega

x_{min}= 1. Leiame ordinaadi väärtuse $y_{min} = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 0$

Vastus. Funktsiooni miinimumpunkt on Pmin(0;1).

b) Koosta funktsiooni $f(x)$ graafikule kohal $x_0 = 2$ tõmmatud puutuja võrrand.

Lahendus. Puutuja võrrand $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, kus puutuja tõus on $k = f'(x_0)$.
Leiame puutepunkti ordinaadi $y(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = 5$.
Leiame puutuja tõusu $k = f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 12$.
Puutuja võrrand on

$y - 5 = 12(x - 2)$

$y = 12x - 19$
Vastus. Puutuja võrrand on y=12x-9.

Ülesanne 8

Koosta joone $y = x^2 - 4x + 3$ nende puutujate võrrandid, mis läbivad punkti (2; - 5). Tee joonis.

Lahendus. Puutuja võrrand $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, kus P($x_0$; y_0) on otsitava puutuja ja antud parabooli puutepunkt.
Leiame joone y = x^2 - 4x + 3 tuletise
$f'(x) = 2x - 4$. *Puutuja tõus* $k = f'(x_0) = 2x_0 - 4$. Puutuja tõusu saab leida ka valemist $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, *kus* $(x_1; y_1)$ *ja* $(x_2; y_2)$ on suvalised punktid puutujaks olevalt sirgelt. Võtame nendeks suvalisteks punktideks puutepunkti P(x_0; y_0) ja antud punkti

A (2;-5), siis puutuja tõusuks saame $k = \dfrac{y_0 + 5}{x_0 - 2}$. Kuna puutepunkt P($x_0$; y_0) asub paraboolil, siis rahuldavad tema koordinaadid ka parabooli võrrandit $y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 3$. Moodustame kolme muutujaga võrrandisüsteemi.

$$\begin{cases} k = 2x_0 - 4 \\ k = \dfrac{y_0 + 5}{x_0 - 2} \\ y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 3 \end{cases}$$

Teeme vastavad asendused puutujavõrrandisse $y_0 + 5 = k(x_0 - 2)$ ja leiame puutepunktide abstsissid

$x_0^2 - 4x_0 + 3 + 5 = (2x_0 - 4)(x_0 - 2) \Rightarrow x_0^2 - 4x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \ ja \ x_0 = 4.$

Leiame puutepunktide ordinaadid.

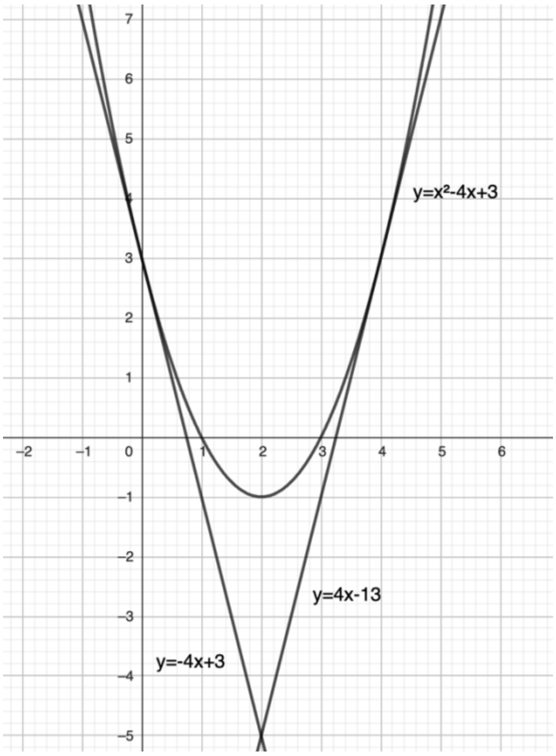
$y_0 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \ ja \ y_0 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$

Puutepunktid on $P_1(0; 3)$ ja $P_2(4; 3)$ ja puutujate tõusud vastavalt

$k = 2 \cdot 0 - 4 = -4 \ ning \ k = 2 \cdot 4 - 4 = 4.$ Lõpuks leiame joone $y = x^2 - 4x + 3$ nende puutujate võrrandid, mis läbivad punkti (2;-5).

$y - 3 = -4(x - 0) \Rightarrow 4x + y - 3 = 0 \ ja \ y - 3 = 4(x - 4) \Rightarrow 4x - y - 13 = 0.$

Skitseerime graafikud.



Ülesanne 9

On antud funktsioon $f(x) = x^2\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$.

a) Arvuta $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Lahendus. $\lim\limits_{x \to 1} x^2\left(\frac{1}{3}x + 2\right) = 1^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + 2\right) = 2\frac{1}{3}$.

b) Leia funktsiooni $f(x)$ kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

NB! Seda ülesannet oskad lahendada pärast järgmise teema (lk. 53-54) omandamist.

Lahendus. Leiame funktsiooni tuletise

$$f(x) = x^2\left(\frac{1}{3}x + 2\right) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$$

$$f'(x) = x^2 + 4x$$

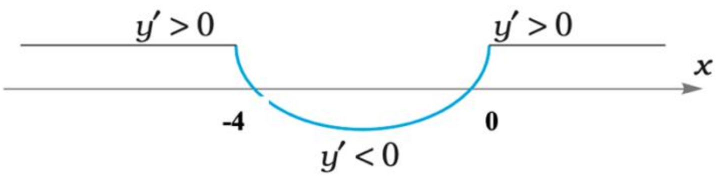
Tingimus funktsiooni kasvamiseks $x^2 + 4x > 0$ ja lahanemiseks $x^2 + 4x < 0$.

Lahendame mõlemad võrratused intervallide meetodi abil. Leiame tuletise nullkohad

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x + 4) = 0$$

$$x_1 = 0 \; ja \; x_2 = -4$$



Vastus. $X \downarrow =]-4; 0[\,, X_1 \uparrow =]-\infty; -4[, X_2 \uparrow =]0; \infty[$

c) Koosta funktsiooni $f(x)$ graafikule tõmmatud puutujate võrrandid, kui mõlema puutuja tõus on 5.

Lahendus. Teame, et puutuja tõus $k = f'(x_0)$.

$$x^2 + 4x = 5$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$Vietei\ teoreemi\ kohselt\ x_1 = -5 \; ja \; x_2 = 1$$

Seega puutepunktide abtsissid on -5 ja1. Leiame puutepunkti ordinaadid.

$$y_0 = \frac{1}{3} \cdot (-5)^3 + 2 \cdot (-5)^2 = 8\frac{1}{3}$$

$$y_0 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 = 2\frac{1}{3}$$

Puutujate võrrandid on

$$y - 8\frac{1}{3} = 5(x + 5)$$

$$y = 5x + 33\frac{1}{3}$$

$$y - 2\frac{1}{3} = 5(x - 1)$$

$$y = 5x - 2\frac{2}{3}$$

Vastus. Puutujate võrrandid on $y = 5x - 2\frac{2}{3}$ *ja* $y = 5x + 33\frac{1}{3}$.