

## II osa lk. 31 HARJUTAVAD ÜLESANDED

### Ülesanne 1

Leia kõigi sajast väiksemate kolme jaguvate positiivsete arvude summa.

Lahendus.

Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige on  $a_1 = 3$  ja viimane liige  $a_n = 99$ . Jadas on 33 liiget. Leida tuleb selliste arvude summa  $S_{33}$ . Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{33} = \frac{3 + 99}{2} \cdot 33 = 1683$$

Vastus. Kõigi sajast väiksemate positiivsete arvude summa on 1683.

### Ülesanne 2

Rong läbis esimeses sekundis peale liikuma hakkamist 0,4 m, igas järgmises sekundis aga 0,5 m rohkem, kui eelmises. Leia rongi poolt 1,2 minutiga läbitud teepikkus.

Lahendus.

Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige on  $a_1 = 0,4$  ja jada vahe  $d = 0,5$  ning liikmete arv  $n = 1,2 \cdot 60 = 72$  (sek). Leida tuleb teepikkus, milleks osutub jada 72 esimese liikme summa  $S_{72}$ . Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$S_{72} = \frac{2 \cdot 0,4 + (72-1) \cdot 0,5}{2} \cdot 72 = 1306,8(m)$$

Vastus. Rongi poolt 1,2 minutiga läbitud teepikkus on 1306,8 meetrit.

### Ülesanne 3

Aritmeetilise jada neljas liige on 3 ja esimese kuue liikme summa on 17. Leia jada 6 esimest liiget.

Lahendus. Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus neljas liige on  $a_4 = 3$  ja kuue esimese liikme summa  $S_6 = 17$  ning jada liikmete arv  $n = 6$ . Leida tuleb jada kuus esimest liiget.

Koostame võrrandisüsteemi kasutades summa valemit  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$  ja jada üldliikme

valemit  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ .

$$\begin{cases} 3 = a_1 + 3d \\ 17 = \frac{a_1 + a_1 + 5d}{2} \cdot 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a_1 + 3d \\ 17 = 6a_1 + 15d \end{cases} \Rightarrow d = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad a_1 = 2.$$

Vastus. Selle jada kuus esimest liiget on  $2; 2\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}; 3; 3\frac{1}{3}; 3\frac{2}{3}$ .

## Ülesanne 4

Arvud, mis väljendavad risttahuka laiust, pikkust ja kõrgust, moodustavad geomeetrilise jada. Leia risttahuka mõõtmed, kui tema ruumala on  $64 \text{ cm}^3$  ja diagonaal  $2\sqrt{21} \text{ cm}$ .

Lahendus. Olgu risttahuka mõõtmed geomeetrilise jada elemendid  $a_1$ ,  $a_2$  ja  $a_3$ . Kasutades risttahuka ruumala valemit  $V = a \cdot b \cdot c$  ja diagonaali leidmise valemit  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 84 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ 64 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \end{cases}$$

Kasutades geomeetrilise jada üldliikme valemit  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  teisendame võrrandisüsteemi kujule

$$\begin{cases} 84 = a_1^2 + (a_1 \cdot q)^2 + (a_1 \cdot q^2)^2 \\ 64 = a_1^3 \cdot q^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 84 = a_1^2 + 4^2 + 4^2 \cdot q^2 \\ 4 = a_1 \cdot q \end{cases} \Rightarrow 68 = \frac{16}{q^2} + 16 \cdot q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot q^4 - 68 \cdot q^2 + 16 = 0 \Rightarrow 4 \cdot q^4 - 17 \cdot q^2 + 4 = 0 \Rightarrow q^2 = \pm 4 \text{ või } q^2 = \pm \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \pm 2 \text{ või } q = \pm \frac{1}{2}.$$

Jada tegur  $q$  ei tohi olla negatiivne, sest risttahuka mõõtmed tuleksid vastasel korral negatiivsed. Mõlemad jada tegurid  $q = 2$  ja  $q = 0,5$  annavad risttahuka mõõtmeteks 2 cm, 4 cm ja 8 cm.

Kontroll. Olgu risttahuka mõõtmed 2 cm, 4 cm ja 8 cm, siis on ruumala tõepoolest  $V = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64 (\text{cm}^3)$  ning risttahuka diagonaal  $d = \sqrt{2^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{84} = 2 \cdot \sqrt{21} (\text{cm})$ . Vastus. Risttahuka mõõtmed on 2 cm, 4 cm ja 8 cm.

## Ülesanne 5

Geomeetrilise jada tegur on 3 ja viie esimese liikme summa on 242. Leia selle jada kolmas liige.

Lahendus. Tegemist on geomeetrilise jadaga, kus jada tegur on  $q = 3$  ja viie esimese liikme summa  $S_5 = 242$ . Leida tuleb kolmas liige  $a_3$ . Kasutame geomeetrilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \quad 242 = \frac{a_1 \cdot (1 - 3^5)}{1 - 3} \Rightarrow 242 = \frac{a_1 \cdot (-242)}{-2} \Rightarrow a_1 = 2 \text{ ja } a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$$

Vastus. Selle jada kolmas liige on 18.

## Ülesanne 6

REI997 Vabal langemisel läbib keha esimeses sekundis 4,9 m ja igas järgnevas sekundis 9,8 m rohkem kui eelmises. Leia aeg, mis kulub kehal maapinnale langemiseks 4410 m kõrguselt.

Lahendus. Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige  $a_1 = 4,9$  ja jada vahe  $d = 9,8$  ning jada summa  $S_n = 4410$ . Leida tuleb aeg, mis osutub jada liikmete arvuks  $n$ .

Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$4410 = \frac{2 \cdot 4,9 + (n-1) \cdot 9,8}{2} \cdot n \Rightarrow 8820 = 9,8n + 9,8n^2 - 9,8n \Rightarrow 9,8n^2 = 8820 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 = 900 \Rightarrow n^2 = \pm 30$$

Negatiivne lahend on mõistagi antud kontekstis võõrlahend.

Vastus. Aeg, mis kulub kehal maapinnale langemiseks on 30 sekundit.

## Ülesanne 7

RE1998 Puuraugu tegemisel maksti esimese meetri puurimise eest 300 krooni ja iga järgmise meetri eest 200 krooni rohkem kui eelmise eest. Koos preemiaga, mis oli 2000 krooni, maksti puuraugu tegemise eest 11900 krooni. Leia puuraugu sügavus.

Lahendus. Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige on  $a_1 = 300$  ja jada vahe  $d = 200$  ning jada summa  $S_n = 11900 - 2000 = 9900$ . Leida puuraugu sügavus, mis osutub jada liikmete arvuks  $n$ . Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$9900 = \frac{2 \cdot 300 + (n-1) \cdot 200}{2} \cdot n \Rightarrow n^2 + 2n - 99 = 0 \Rightarrow n_1 = 9 \text{ ja } n_2 = -11 (\text{võõrlahend})$$

Vastus. Puuraugu sügavus on 9 meetrit.

## Ülesanne 8

RE1999 Tööpink maksab uuena 40000 krooni ja tema väärtus väheneb iga-aastaga 5% võrra aasta alguses olnud väärtusest.

a) Kui suur on selle tööpingi väärtus 4 aasta pärast?

Ülesande võib lahendada nii liitintressi kui ka, kui geomeetrilise jada ülesandena, kus esimene liige on  $a_1 = 40000$  ja jada tegur  $q = 1 - 0,05 = 0,95$ . Leida tuleb selle jada viies liige (4 aasta pärast)  $a_5$ .

Kasutame geomeetrilise jada üldliikme valemit  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ .

$$a_5 = 40000 \cdot 0,95^{5-1} = 32580,25 \approx 33000$$

Vastus. Tööpingi väärtus 4 aasta pärast on ligikaudu 33000 krooni.

b) Mitme aasta pärast on tööpingi väärtus tema esialgselt väärtusest kaks korda väiksem?

Kasutame siingi geomeetrilise jada üldliikme valemit  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ .

$$20000 = 40000 \cdot 0,95^{n-1} \Rightarrow 0,95^{n-1} = 0,5 \Rightarrow (n-1)\log 0,95 = \log 0,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 0,5}{\log 0,95} + 1 \approx 14,513 \approx 14$$

Vastus. Ligikaudu 14 aasta pärast on tööpingi väärtus tema esialgselt väärtusest kaks korda väiksem.

## Ülesanne 9

RE2000 Vaatleme kõiki kolmekohalisi arve, mis jagamisel neljaga annavad jäägi üks.

a) Kirjuta kolm esimest ja kolm viimast sellist arvu.

Lahendus. Kuna tegemist on aritmeetilise jadaga, kus jada vahe on  $d = 4$ , siis kolm esimest arvu on 101, 105, 109 ja kolm viimast arvu 989, 993, 997.

Vastus. Need arvud on 101, 105, 109 ja 989, 993, 997.

b) Leia kõikide selliste arvude summa.

Lahendus. Jada liikmete arvu saame aritmeetilise jada üldliikme valemist

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

$$997 = 101 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow 900 = 4n \Rightarrow n = 225$$

Summa leidmiseks kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{101 + 997}{2} \cdot 225 = 123525$$

Vastus. Selliste arvude summa on 123525.

c) Leia kõikide kolmekohaliste arvude summa.

Lahendus. Kolmekohalisi arve on 900.

$$S_{900} = \frac{100 + 999}{2} \cdot 900 = 494550$$

Vastus. Kõikide kolmekohaliste arvude summa on 494550.

d) Mitu protsenti punktis b) leitud summa moodustab punktis c) leitud summast?

Lahendus. Arv 123525 moodustab arvust 494550

$$\frac{123525}{494550} \cdot 100\% \approx 24,977\% \approx 25\%$$

Vastus. Punktis b) leitud summa moodustab punktis c) leitud summast ligikaudu 25%.

## Ülesanne 9

RE2002 Metsatükil on hinnanguliselt 15 000 tihumeetrit (tm)puitu. Raie käigus saeti maha 8% sellest kogusest.

a) Mitu tm puitu jäi pärast raie alles?

Lahendus. Maha saeti 8% puidust. 8% 15000 – st on  $0,08 \cdot 15000 = 1200$  (tm). Alles jäi  $15000 - 1200 = 13800$  (tm) puitu.

b) Mitmendal aastal pärast raie on sellel metsatükil jälle 15 000 tm puitu, kui puidu igaaastane juurdekasv on keskmiselt 2%?

Lahenduseks võib kasutada nii liitintressi kui ka geomeetrilise jada üldliikme valemit

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

$$15000 = 13800 \cdot 1,02^{n-1} \Rightarrow 1,02^{n-1} = \frac{25}{23} \Rightarrow (n-1) \cdot \log 1,02 = \log \frac{25}{23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log \frac{25}{23}}{\log 1,02} + 1 \approx 5,21 \approx 5$$

Vastus. Viiendal aastal pärast raie on metsatükil jälle 15000 tm puitu.

## Ülesanne 10

Kalmistuvaht Alduri hooldusalas on 52 kalmu, millele istutatud lilli peab ta kastma. Kalmud asuvad ühes reas 6-meetriste vahedega ja kaevust esimese kalmuni on 18 meetrit. Kui pika tee läbib kalmistuvaht lilli kastes, kui iga korraga kastab ta ühe kalmu, kaev asetseb kalmudega ühel sirgel ning kõik kalmud on kaevust ühel pool?

Lahendus. Tegemist on aritmeetilise jada ülesandega.

$$a_1 = 18 \text{ (m)}$$

$$d = 6 \text{ (m)}$$

Kasutame aritmeetilise jada summa valemit  $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

$$S_{52} = \frac{2 \cdot 18 + 51 \cdot 6}{2} \cdot 52 = 8892 \text{ (m)}$$

Kuna kalmistuvahil tuleb pärast iga kastmist ka tagasi kaevule minna, siis saame  $2 \cdot 8892 = 17784 \text{ (m)}$ .

Vastus. Alduril tuleb kastmiseks läbi käia 17784 m ehk ligikaudu 18 km.