

II osa lk. 24-25 HARJUTAVAD ÜLESANDED

Ülesanne 1

1) Lahenda võrrandid lõigul $[0; 2\pi]$.

a) $3 \tan^2 x - 1 = 0$

Lahendus. Teisendame lähtevõrrandi kujule

$$\tan^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \pm \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} + n\pi, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Eri lahendid lõigul kui $n = 0$, siis $x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$.

Kontroll.

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$vp = 3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - 1 = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$$

$$pp = 0, \quad vp = pp.$$

Kui $n = 1$, siis

$$x_2 = -30^\circ + 180^\circ = 150^\circ$$

$$vp = 3 \tan^2 150^\circ - 1 = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$$

$$pp = 1, \quad vp = pp$$

$$x_3 = 30^\circ + 180^\circ = 210^\circ$$

$$vp = 3 \tan^2 210^\circ - 1 = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$$

$$pp = 1, \quad vp = pp$$

Kui $n = 2$, siis

$$x_4 = -30^\circ + 2 \cdot 180^\circ = 330^\circ$$

$$vp = 3 \tan^2 330^\circ - 1 = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$$

$$pp = 1, \quad vp = pp$$

Vastus. Võrrandi lahendid lõigul $[0; 2\pi]$ on $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$.

b) $2\sin^2x = 3\cos(2\pi - x)$

Lahendus. Paremalt pool kasutame IV veerandi taandamisvalemit.

$$2\sin^2x - 3\cos x = 0$$

$$\text{Asendame } \sin^2x = 1 - \cos^2x.$$

$$2(1 - \cos^2x) - 3\cos x = 0$$

$$2\cos^2x + 3\cos x - 2 = 0$$

Lahendame ruutvõrrandi koosinuse suhtes.

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$1) \cos x = 0,5 \Rightarrow x = \pm \arccos 0,5 + 2n\pi = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos x = -2, \text{ sellel põhivõrrandil lahendid puuduvad.}$$

Leiame erilahendid lõigul.

$$\text{Kui } n = 0, \text{ siis } x = 60^\circ \text{ ja kui } n = 1, \text{ siis } x = 300^\circ.$$

Lahendi kontroll tuleb teha mõlema erilahendiga.

Vastus. Võrrandi lahendid lõigul $[0; 2\pi]$ on 60° ja 300° .

c) $\sin^2x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2x = 0$

Lahendus. Tegemist on homogeense trigonomeetrilise võrrandiga. Jagame võrrandi mõlemad pooled \cos^2x . Jagamise tulemusena saame võrrandi tangensi suhtes.

$$\sin^2x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2x = 0 \quad | : \cos^2x \neq 0$$

$$\tan^2x - 3 \tan x + 2 = 0$$

$$\text{Asenda } \tan x = v$$

$$v^2 - 3v + 2 = 0$$

$$v_1 = 1, v_2 = 2$$

$$1) \tan x = 2 \text{ üldlahend on } x = \arctan 2 + n\pi \approx 63^\circ 26' + n \cdot 180^\circ$$

$$2) \tan x = 1 \text{ üldlahend on } x = \arctan 1 + n\pi = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Leiame erilahendid lõigul.

$$\text{Kui } n = 0, \text{ siis } x \approx 63^\circ 26' \text{ ja } x = 45^\circ.$$

$$\text{Kui } n = 1, \text{ siis } x \approx 63^\circ 26' + 180^\circ = 243^\circ 26' \text{ ja } x = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ.$$

Kontrollida tuleb kõiki erilahendeid.

Vastus. Võrrandi lahendid lõigul $[0; 2\pi]$ on 45° , $63^\circ 26'$, 225° ja $243^\circ 26'$.

d) $\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = 1$

Lahendus. Kasutame liitmisvalemit.

$$\cos(x + 2x) = 1$$

$$\cos 3x = 1$$

$$3x = \pm \arccos 1 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad | : 3$$

$$x = \frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

Erilahendid lõigul.

$$\text{Kui } n = 0, \text{ siis } x = 0^\circ$$

$$\text{Kui } n = 1, \text{ siis } x = 120^\circ$$

$$\text{Kui } n = 2, \text{ siis } x = 240^\circ$$

$$\text{Kui } n = 3, \text{ siis } x = 360^\circ.$$

Kontrollida tuleb kõiki erilahendeid.

Vastus. Võrrandi lahendid lõigul $[0; 2\pi]$ on 0° , 120° , 240° ja 360° .

$$\text{e) } \frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1$$

Lahendus. Kasutame liitmisvalemit.

$$\tan(3x - 2x) = 1$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \arctan 1 + n\pi = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Erilahendid lõigul.

Kui $n=0$, siis $x=45^\circ$

Kui $n=1$, siis $x=45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$

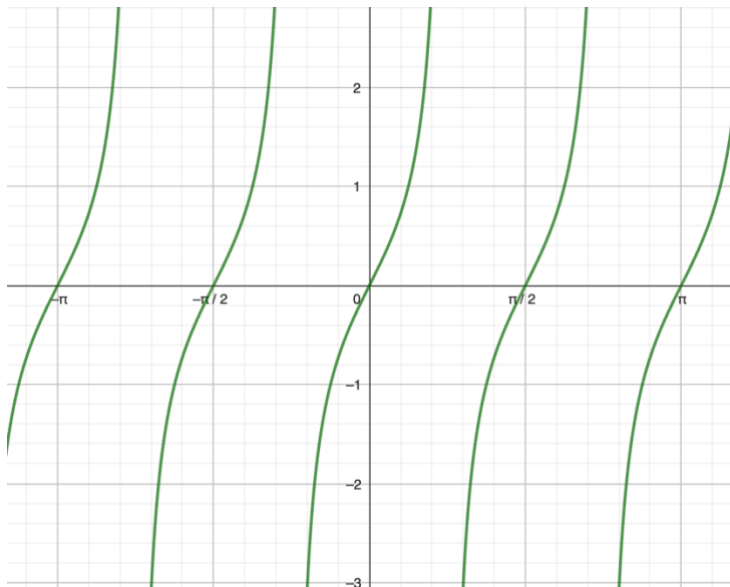
Kontrollida tuleb mõlemaid erilahendeid.

Vastus. Võrrandi lahendid lõigul $[0; 2\pi]$ on 45° ja 225° .

Ülesanne 2

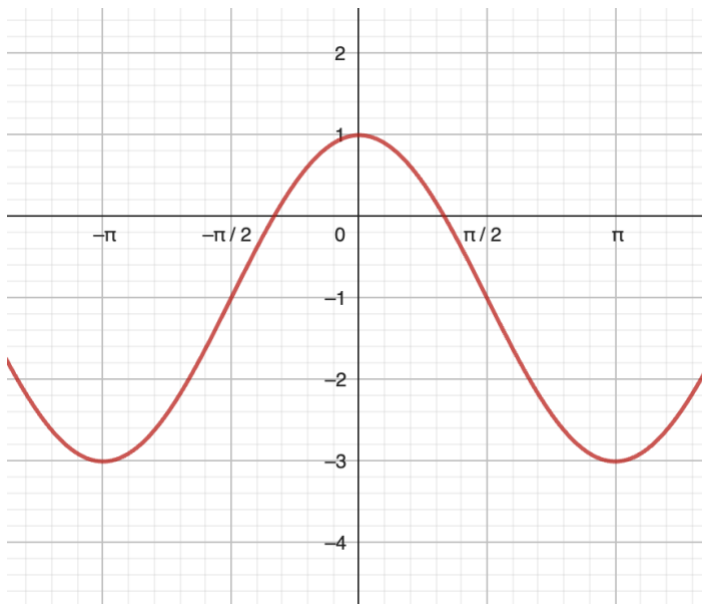
Skitseeri funktsiooni graafik lõigul $[-\pi; \pi]$.

a) $y = \tan 2x$



$$T = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$
$$X = [-\pi; \pi] \setminus \left\{ -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$$
$$Y = \mathbb{R}$$

b) $y=2\cos x-1$



$$T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi = 360^\circ$$

$$X = [-\pi; \pi]$$

$$Y = [-3; 1]$$

Ülesanne 3

Tõesta samasus $\frac{\sin 2x - \tan x}{\tan x} = \cos 2x$.

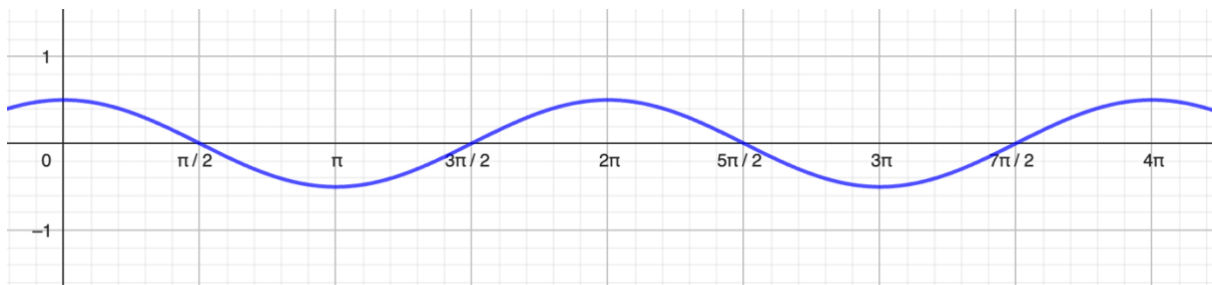
Tõestus.

$$\text{vp} = \frac{\sin 2x - \tan x}{\tan x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} - \frac{\tan x}{\tan x} = 2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

$$\text{pp} = \cos 2x, \text{vp} = \text{pp}$$

Ülesanne 4

Skitseeri funktsiooni $y = 0,5 \cos x$ graafik lõigul $[0; 4\pi]$. Leia graafikult funktsiooni muutumispiirkond, nullkohad, kasvamis- ja kahanemisvahemikud.



Vastus.

$$Y = [-0,5; 0,5]; X_0 = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right\};$$

$$X_1 \uparrow =]\pi; 2\pi[, X_2 \uparrow =]3\pi; 4\pi[, X_1 \downarrow =]0; \pi[, X_2 \downarrow =]2\pi; 3\pi[.$$

Ülesanne 5

RE 2005Joonesta samas teljestikus funktsioonide $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ graafikud. Määra lõigul $[\pi; 2\pi]$ graafikute lõikepunkti koordinaadid. Põhjenda vastust.

Lahendus.

Graafikute lõikepunkt antud lõigul on $A\left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Lõikepunkti leidmiseks lahendame homogeense võrrandi $\sin x = \cos x$.

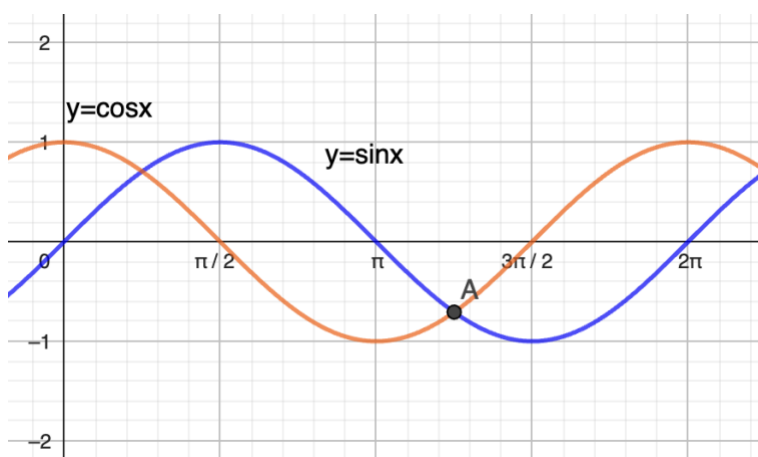
$$\sin x - \cos x = 0 \quad | : \cos x$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \arctan 1 + n\pi = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Kui } n = 1, \text{ siis } x = \frac{5\pi}{4}, \quad x \in [\pi; 2\pi]$$

$$y = \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{või ka} \quad \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Vastus. Graafikute lõikepunkt on $\left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ülesanne 6

a) Leia antud lõigul funktsiooni negatiivsuspiirkond ja miinimumpunktide koordinaadid.

$$\text{Vastus. } X^- =]-2\pi; \pi[\cup]0; \pi[, P_{\min 1} \left(-\frac{3\pi}{2}; -2\right), P_{\min 2} \left(\frac{\pi}{2}; -2\right).$$

b) Kas punkt $P\left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$ funktsiooni graafikul? Põhjenda vastust.

$$\text{Vastus. Ei asu, sest } y = -2\sin \frac{\pi}{3} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

- c) Kas antud funktsioon on paaris või paaritu? Põhjenda vastust.

Vastus. Antud funktsioon on paaritu, sest graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes ja $f(-x) = -2\sin(-x) = 2\sin x = -f(x)$.

- d) Lahenda antud lõigul võrrand $-2\sin x = -1$.

Lahendus.

$$-2\sin x = -1 \Rightarrow 2\sin x = 1 \mid :2$$

$$\sin x = 0,5$$

$$x = (-1)^n \arcsin 0,5 + n \cdot \pi = (-1)^n \cdot 30^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

Erilahendid lõigul on

$$\text{kui } n=0, \text{ siis } x = (-1)^0 \cdot 30^\circ + 0 \cdot 180^\circ = 30^\circ$$

$$\text{kui } n=-1, \text{ siis } x = (-1)^{-1} \cdot 30^\circ - 1 \cdot 180^\circ = -210^\circ$$

Lahendit kontrolli graafiku abil.

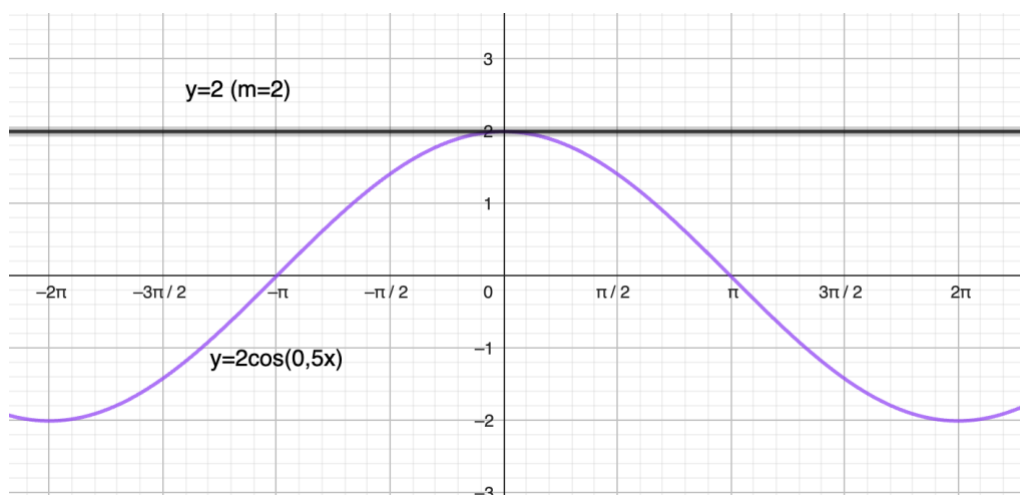
- e) Lahenda antud lõigul võrratus $-2\sin x < -1$.

Kasutades eelmises punktis saadud võrrandi lahendeid ja funktsiooni graafikut

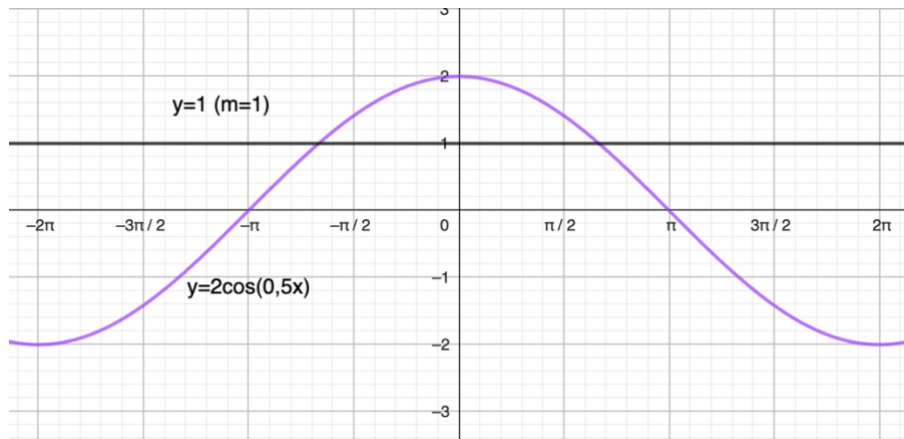
$$x \in]-330^\circ; -210^\circ[\cup]30^\circ; 150^\circ[$$

Ülesanne 7

- a) Võrrandil on täpselt üks lahend, kui funktsioonide $y = m$ ja $y = 2\cos 0,5x$ graafikutel on üks ühine lõikepunkt. Antud lõigul on see juhul kui m on täisarv 2.



- b) Võrrandil on täpselt kaks lahendit, kui funktsioonide $y = m$ ja $y = 2\cos 0,5x$ graafikutel on kaks ühist lõikepunkti. Antud lõigul on see juhul kui m on täisarv 1.



Ülesanne 8

Näpunäide. Leia funktsiooni periood ning võnkeamplituud ja otsusta graafiku põhjal, kas funktsioon on paaris või paaritu.

Vastus.

- a) $y = \sin 2x$
- b) $y = \cos 0,5x$
- c) $y = -2\cos x$