

ÜLESANDEID RIIGIEKSAMILT lk. 22-23

- 1) RE1997 (10p.) Arvuta avaldiste A ja B väärtsused (ilma taskuarvutita)**

$$A = \left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a} \right),$$

$$B = \frac{1^{-1} + 2^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + (-4)^{-1} \cdot 5 + 0,5^{-2}} \cdot (-3,07)^0. \text{ Mitme protsendi võrra on avaldise B}$$

väärtus väiksem avaldise A väärtusest?

Leiame esmalt avaldiste väärtused

$$A = \left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} \quad & \frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)} = \frac{(1-\sqrt{a})(1+a) + (1+\sqrt{a})(1+a) - 2(a^2+1)}{2(1-a^2)} = \\ & = \frac{2a - 2a^2}{2(1-a^2)} = \frac{2a(1-a)}{2(1-a^2)} = \frac{a}{1+a} \end{aligned}$$

$$\mathbf{b)} \quad \frac{a}{1+a} \cdot \frac{a+1}{a} = 1, \text{ st. } A = 1$$

$$B = \frac{1^{-1} + 2^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + (-4)^{-1} \cdot 5 + 0,5^{-2}} \cdot (-3,07)^0 = \frac{1 + \frac{1}{4}}{\frac{9}{4} - \frac{1}{4} \cdot 5 + 4} \cdot 1 = \frac{1\frac{1}{4}}{5} = \frac{1}{4}$$

Avaldise B väärtus on avaldise A väärtusest väiksem $A - B = 1 - 0,25 = 0,75$

võrra ning moodustab avaldise A väärtusest $\frac{0,75 \cdot 100\%}{1} = 75\%.$

Vastus: Avaldise B väärtus on avaldise A väärtusest väiksem 75% võrra.

- 2) RE1998 (5p.) Leia avaldise $\frac{7y^{-1} - 4x^{-1}}{3y^{-1} - x^{-1}}$ väärtus, kui $x : y = 3 : 4.$**

$$\frac{\frac{7}{y} - \frac{4}{x}}{\frac{3}{y} - \frac{1}{x}} = \frac{7x - 4y}{xy} : \frac{3x - y}{xy} = \frac{7x - 4y}{3x - y} .$$

Kui $x : y = 3 : 4$, siis $x = \frac{3y}{4}.$

$$\left(7 \cdot \frac{3y}{4} - 4y \right) : \left(3 \cdot \frac{3y}{4} - y \right) = 1\frac{1}{4}y : 1\frac{1}{4}y = 1.$$

- 3) RE1998 (5p.) Leia avaldise $\frac{8^{-x} \cdot 12^{x+2}}{6^{2-x} \cdot 18^x \cdot 2^{1-x}}$ lihtsustus ja näita, et selle väärtus ei sõltu x-i väärtusest.**

$$\frac{8^{-x} \cdot 12^{x+2}}{6^{2-x} \cdot 18^x \cdot 2^{1-x}} = \frac{(2^3)^{-x} \cdot (2^2 \cdot 3)^{x+2}}{(2 \cdot 3)^{2-x} \cdot (2 \cdot 3^2)^x \cdot 2^{1-x}} =$$

$$\frac{2^{-3x} \cdot 2^{2x+4} \cdot 3^{x+2}}{2^{2-x} \cdot 3^{2-x} \cdot 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 2^{1-x}} = \frac{2^{-x+4} \cdot 3^{x+2}}{2^{3-x} \cdot 3^{2+x}} = 2^{-x+4-3+x} = 2^1 = 2$$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks on 2 ja seega avaldis ei sõltu x-st.

- 4) RE2000 (10p.) Lihtsusta avaldist $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x^3}}{x+1} + \frac{1}{x}$. Leia antud avaldise väärthus x = 9 korral. Veendu, et lihtsustamise tulemus on õige.**

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{x - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

b) $\frac{\sqrt{x}}{x-1} : \frac{\sqrt{x^3}}{x+1} = \frac{\sqrt{x} \cdot (x+1)}{(x-1)\sqrt{x^3}} = \frac{x+1}{(x-1)x}$

c) $\frac{x+1}{(x-1)x} + \frac{1}{x} = \frac{x+1+x-1}{x(x-1)} = \frac{2}{x-1}$

d) $\frac{2}{9-1} = \frac{1}{4}$

Kontroll: $\left(\frac{9}{9-1} - \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}+1} \right) : \frac{\sqrt{9^3}}{9+1} + \frac{1}{9} = \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{4} \right) : \frac{27}{10} + \frac{1}{9} = \frac{3}{8} \cdot \frac{10}{27} + \frac{1}{9} = \frac{5}{36} + \frac{1}{9} = \frac{1}{4}$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks saime $\frac{2}{x-1}$ ning avaldise väärthus $\frac{1}{4}$.

- 5) RE2000 (10p.) Lihtsusta avaldist $\frac{1}{x(x-1)} + \left(\frac{x}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x^3}}{x-1}$. Leia antud avaldise väärthus x = 4 korral. Veendu, et lihtsustamise tulemus on õige.**

e) $\frac{x}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{x - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

f) $\frac{\sqrt{x}}{x-1} : \frac{\sqrt{x^3}}{x-1} = \frac{\sqrt{x} \cdot (x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x}$

g) $\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x} = \frac{1+x-1}{x(x-1)} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}$

h) $\frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$

Kontroll:

$$\frac{1}{4(4-1)} + \left(\frac{4}{4-1} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+1} \right) : \frac{\sqrt{4^3}}{4-1} = \frac{1}{12} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) : \frac{8}{3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} : \frac{8}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks saime $\frac{1}{x-1}$ ning avaldise väärthus $\frac{1}{3}$.

6) RE2001 (10p.)

1)Lihtsusta avaldised

$$A = 6(a + 2)^2 - 3(2a^2 + 9a + 3)$$

$$B = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{xy} \right)^{-1}$$

2)Arvuta avaldise väärised, kui $a = 1$, $x = 9$, $y = 25$.

3)Kumb punktis 2) leitud arvudest on teisest suurem ja mitme protsendi võrra?

Lihtsustame esmalt avaldised:

$$A = 6(a + 2)^2 - 3(2a^2 + 9a + 3) = 6a^2 + 24a + 24 - 6a^2 - 27a - 9 = -3a + 15$$

$$B = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{xy} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = \sqrt{xy}.$$

Leiame avaldiste väärised:

$$A = -3 \cdot 1 + 15 = 12$$

$$B = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$$

Avaldise B väärus on $15 - 12 = 3$ võrra suurem A väärusest ja suurem

$$\frac{3 \cdot 100\%}{12} = 25\% \text{ võrra.}$$

Vastus: Avaldis A lihtsustus kujule $-4a + 15$ ning selle vääruseks on 12 ja B kujule \sqrt{xy} ning vääruseks on 15. Avaldise B väärus on 3 võrra ehk 25% võrra suurem avaldise A väärusest.

7) RE2001 (10p.)

1)Lihtsusta avaldised

$$A = 6(m - 3)^2 - 2(3m^2 - 16m + 20)$$

$$B = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{ab} \right)^{-1}$$

2)Arvuta avaldise väärised, kui $m = 2$, $a = 4$, $b = 25$.

3)Kumb punktis 2) leitud arvudest on teisest väiksem ja mitme protsendi võrra?

Lihtsustame esmalt avaldised:

$$A = 6(m - 3)^2 - 2(3m^2 - 16m + 20) = 6m^2 - 36m + 54 - 6m^2 + 32m - 40 = -4m + 14$$

$$B = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{ab} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Leiame avaldiste väärised:

$$A = -4 \cdot 2 + 14 = 6$$

$$B = \sqrt{4}\sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10.$$

Avaldise A väärus on $10 - 6 = 4$ võrra väiksem ja väiksem $\frac{4 \cdot 100\%}{10} = 40\%$ võrra

avaldise B väärusest.

Vastus: Avaldis A lihtsustus kujule $-4m + 14$ ning selle vääruseks on 6 ja B kujule \sqrt{ab} ning vääruseks on 10. Avaldise A väärus on 4 võrra ehk 40% võrra väiksem avaldise B väärusest.

8) RE2002 (5p.) Antud on avaldis $(a-b)^{-1} \cdot (b^{-2} - a^{-2})$

a) Esita avaldis positiivsete astendajate abil.

b) Tee näidatud tehted ja taanda saadud murd.

$$a) (a-b)^{-1} \cdot (b^{-2} - a^{-2}) = \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

$$b) \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{a^2 b^2} = \frac{a+b}{a^2 b^2}.$$

Vastus. Positiivsete astendajate abil avaldub antud avaldis kujul $\frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)$

ja lõpptulemuseks on $\frac{a+b}{a^2 b^2}$.

9) RE2003(5p.) Lihtsusta avaldis $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$.

$$\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) = \left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2}{a-1} \right) \cdot \left(\frac{a-1}{\sqrt{a}} \right) =$$

$$\left(\frac{2\sqrt{a} + 2\sqrt{a}}{a-1} \right) \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}(a-1)}{(a-1)\sqrt{a}} = 4$$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks saime 4.

10) RE2003(5p.) Lihtsusta avaldis $\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} + \frac{1}{1-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a^{-2}-1}{2a^{-2}}$.

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} + \frac{1}{1-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a^{-2}-1}{2a^{-2}} =$$

$$\frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{1-a} \cdot \frac{\frac{1}{a^2}-1}{\frac{2}{a^2}} = \frac{2}{1-a} \cdot \frac{\frac{1-a^2}{a^2}}{\frac{2}{a^2}} = \frac{2}{1-a} \cdot \frac{(1-a)(1+a) \cdot a^2}{2a} = 1+a$$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks saime $1+a$.

11) RE2004 (5p.) Antud on avaldis $\left(1+a^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \cdot \frac{a}{a^0 - a}$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$.

a) Lihtsusta avaldis.

b) Arvuta avaldise väärustus, kui $a = 25^{-2}$.

$$a) \left(1+a^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \cdot \frac{a}{a^0 - a} = \left(1+\sqrt{a} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1 \right) \cdot \frac{a}{1-a} = \frac{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})a}{\sqrt{a}(1-a)} =$$

$$\frac{(1-a)\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}(1-a)} = \sqrt{a}$$

$$b) \sqrt{25^{-2}} = (\sqrt{25})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks saime \sqrt{a} ning väärtsuseks $\frac{1}{25}$.

12) RE2004(5p.) Lihtsusta avaldis $\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2ab\sqrt{a}}\right)^{-1} + \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2ab\sqrt{b}}\right)^{-1}$ ja arvuta selle väärthus, kui $a = 10^{\frac{5}{2}}$ ja $b = 10^{-\frac{1}{2}}$.

$$\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2ab\sqrt{a}}\right)^{-1} + \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2ab\sqrt{b}}\right)^{-1} = \frac{2ab\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{2ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 2ab.$$

Leiame nüüd avaldise väärthus.

$$2ab = 2 \cdot 10^{\frac{5}{2}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot 10^{\frac{4}{2}} = 2 \cdot 10^2 = 200.$$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks saime $2ab$ ning väärtsuseks 200.

13) RE2004 (5p.) Antud on avaldis $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1+x}\right)^{-1} \cdot (1 + \sqrt{1-x^2})$.

a) Lihtsusta see avaldis.

b) Arvuta saadud tulemuse väärthus, kui $x = \cos^2 \frac{\pi}{6}$.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1+x}\right)^{-1} \cdot (1 + \sqrt{1-x^2}) = \left(\frac{\sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{(1+x)(1-x)}}\right) \cdot (1 + \sqrt{1-x^2}) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x^2}}\right) \cdot (1 + \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x}.$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{6}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}.$$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks saime $\sqrt{1-x}$ ning väärtsuseks $\frac{1}{2}$.