

KORDAMINE RIIGIEKSAMIKS III

JADAD

1) Arvjad, mille (teisest liikmest alates) iga liikme ja sellele eelneva liikme vahe on jääv (jada vahe - d), nimetatakse **aritmeetiliseks jadaks**.

a) Üldliikme valem $a_n = a_1 + (n-1)d$

b) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

c) $a_n = a_{n-1} + d$

d) Jada n liikme summa $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
 $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Näide. Leidke aritmeetilise jada 15 esimese liikme summa, kui esimene liige on 4 ja jada vahe on 7.

$$S_{15} = \frac{2 \cdot 4 + (15-1) \cdot 7}{2} \cdot 15 = 795$$

2) Arvjad, mille (teisest liikmest alates) iga liikme ja sellele eelneva liikme jagatis on jääv (jada tegur - q), nimetatakse **geomeetriliseks jadaks**.

a) Üldliikme valem $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

b) $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

c) $a_n = a_{n-1} \cdot q$

d) Jada n liikme summa $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$

e) Geomeetrist jada, mille tegur $|q| < 1$ nimetatakse hääbuva geomeetriliseks jadaks. Hääbuva jada liikmete summa $S = \frac{a_1}{1 - q}$.

Näide. Leidke geomeetrilise jada 8 esimese liikme summa, kui esimene liige on 4 ja jada tegur 5.

$$S_8 = \frac{4(5^8 - 1)}{5 - 1} = 390624$$

NÄITEÜLESANDED

1) On antud jada $a_n = \frac{3}{n^2 + n}$. Kirjutage välja selle jada 4 esimest liiget ja liige

a_{n+3} .

a) Mitmendast liikmest alates on jada liikmed väiksemad kui 0,1?

b) Kujutage jada graafiliselt.

Lahendus. Leiame jada esimesed viis liiget.

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{1^2 + 1} = 1\frac{1}{2}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2^2 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{3^2 + 3} = \frac{1}{4}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4^2 + 4} = \frac{3}{20} = 0,15$$

$$n + 3 \Rightarrow a_{n+3} = \frac{3}{(n+3)^2 + n} = \frac{3}{n^2 + 7n + 12}$$

Leiame, mitmendast liikmest alates on jada liikmed väiksemad kui 0,1.

Selleks lahendame võrratuse

$$\frac{3}{n^2 + n} < 0,1 \Rightarrow \frac{3}{n^2 + n} - 0,1 < 0 \Rightarrow \frac{3 - 0,1n^2 - 0,1n}{n^2 + n} < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-0,1n^2 - 0,1n + 3}{n^2 + n} < 0 \mid (-1) \Rightarrow \frac{0,1n^2 + 0,1n - 3}{n^2 + n} > 0 \Leftrightarrow (0,1n^2 + 0,1n - 3)n(n+1) > 0$$

Tegurdame esimeses sulus oleva ruutkolmliikme.

$$0,1n^2 + 0,1n - 3 = 0 \mid \cdot 10$$

$$n^2 + n - 30 = 0$$

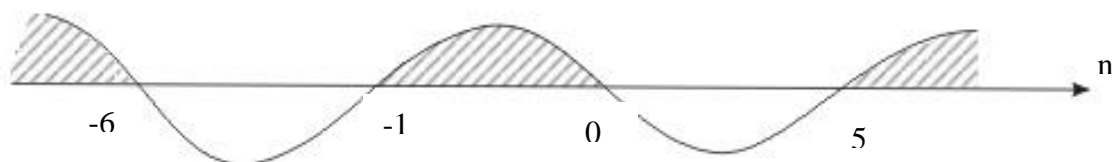
$$n = -0,5 \pm \sqrt{0,25 + 30} = -0,5 \pm 5,5$$

$$n_1 = 5$$

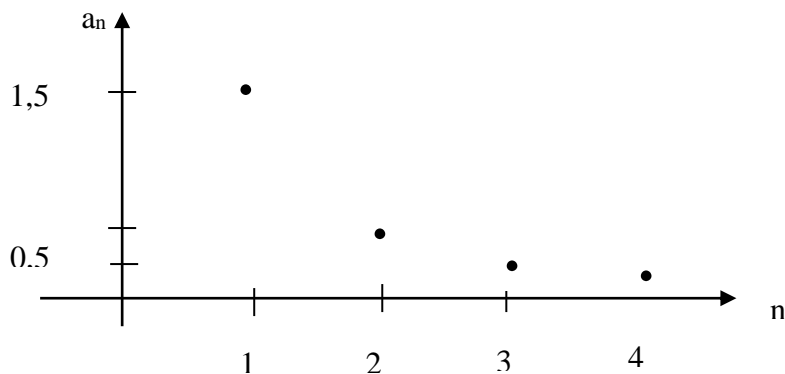
$$n_2 = -6$$

Saame võrratuse $0,1(n-5)(n+6)n(n+1) > 0$.

Lahendame selle intervallide meetodiga.



Saadud lahendihulgast sobib meile ainult $n > 5$ (n on jada liikme järjenumbr, seega peab n olema naturaalarv!). Seega on jada liikmed 0,1-st väiksemad alates 6 liikmest.



Jada kujutab graafiliselt punktihulk.

- 2) On antud jada üldliige $a_n = n^2 - 5n - 6$. Kas arv 8 on antud jada liige?
Mitmes liige selles jadas on arv 30?

Lahendus. Selleks, et arv 8 oleks jada liige peab võrrandil $8 = n^2 - 5n - 6$ olema olemas naturaalarvuline lahend. Lahendame selle võrrandi

$$n^2 - 5n - 14 = 0$$

Viete'i teoreemi põhjal on lahendid $n_1 = 7$ ja $n_2 = -2$ ($-2 \cdot 7 = -14$ ja $-2 + 7 = 5$)

Lahend -2 ei sobi, kuna jada liikmete järjenumbrer n saab olla ainult positiivne täisarv ehk naturaalarv. Seega on lahendiks 7. Saame tulemuseks, et 8 on selle jada 7. liige.

Analoogiliselt leiame arvu 30 järjenumbreri. Saame võrrandiks $30 = n^2 - 5n - 6$.

Lahendades selle võrrandi

$$n^2 - 5n - 36 = 0$$

saame lahenditeks $n_1 = -4$ ja $n_2 = 9$. Esimene lahend -4 ei sobi. Seega on 30 jada 9 liige.

Vastus. Arv 8 on jada liige ja arv 30 on selle jada 9. liige.

- 3) Leidke esimese 200 paaritu arvu summa.

Lahendus. Ülesande andmete kohaselt on tegemist aritmeetilise jadaga, kus

$$a_1 = 1$$

$$d = 2$$

$$n = 200$$

$$\text{Leiame } S_{200} = \frac{2 \cdot 1 + 199 \cdot 2}{2} \cdot 200 = 40000$$

Vastus. Esimese 200 paaritu arvu summa on 40000.

- 4) Leidke positiivsete liikmetega geomeetrilise jada esimese viie liikme summa, kui kolmas liige on 12 ja viies liige on 48.

Lahendus. Geomeetrilise jada üldliikme valemist $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ saame, et

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 12 \text{ ja } a_5 = a_1 \cdot q^4 = 48. \text{ Saame võrrandisüsteemi}$$

$$\begin{cases} a_1 q^2 = 12 \\ a_1 q^4 = 48 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 q^2}{a_1 q^4} = \frac{12}{48} \Rightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$$

Lahend -2 ei sobi, kuna jada peab olema positiivsete liikmetega. Leiame

$$a_1 = \frac{12}{q^2} = \frac{12}{4} = 3.$$

$$\text{Geomeetrilise jada summa valemist } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{3 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 93.$$

Vastus. Jada viie esimese liikme summa on 93.

- 5) Leidke kõigi sajast väiksemate kolmega jaguvate positiivsete arvude summa.

Lahendus. Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige on $a_1 = 3$ ja viimane liige $a_n = 99$. Jadas on $99 : 3 = 33$ liiget. Leida tuleb selliste arvude summa S_{33} . Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{33} = \frac{3 + 99}{2} \cdot 33 = 1683$$

Vastus. Kõigi sajast väiksemate positiivsete arvude summa on 1683.

6) Leidke geomeetrilise jada $-2, 1, -0,5, \dots$ summa ja üheksa esimese liikme summa.

Lahendus. Leiame jada teguri $q = \frac{1}{-2} = -0,5$, $|-0,5| < 1$ ja seega on tegemist hääbuva

jadaga, mille summa saame leida valemi $S = \frac{a_1}{1-q}$ abil. $S = \frac{-2}{1+0,5} = -1\frac{1}{3}$.

Üheksa liikme summa leiame valemiga

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_9 = \frac{-2 \cdot ((-0,5)^9 - 1)}{-0,5 - 1} = -1\frac{43}{128}$$

Vastus. Jada summa on $-1\frac{1}{3}$ ja esimese üheksa liikme summa $-1\frac{43}{128}$.

7) Aednik müüs esimesele ostjale poole oma õuntest ja veel pool õuna, teisele ostjale poole ülejäänutest ja veel pool õuna jne., kuni seitsmendale ostjale jäi pool selleks ajaks allesjäänud õuntest ja veel pool õuna. Siis olid õunad otsas. Mitu õuna oli aednikul? (L. Lepmann, T. Lepmann, H-M. Varul Ülesandeid gümnaasiumi matemaatika lõpueksamiks valmistumisel, Koolibri)

Lahendus. Tähistame õunte arvu x -ga. Siis esimene ostja sai $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ õuna ja järgi jäi

$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ õuna. Teine ostja sai $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ õuna ja järgi jäi

$\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ õuna. Kolmas ostja sai $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$ õuna jne.

Saame geomeetrilise jada, mille jada tegur on

$$q = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(x+1) : \frac{1}{2}(x+1) = 0,5 \text{ ja esimene liige } a_1 = \frac{1}{2}(x+1).$$

Leiame seitsme liikme summa

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{0,5(x+1) \cdot (0,5^7 - 1)}{0,5 - 1} = (x+1) \frac{127}{128}. \text{ Saadud summa väljendab}$$

aga kõigi õunte arvu x . Saame võrrandi

$$\frac{127}{128}x + \frac{127}{128} = x$$

$$\frac{127}{128}x - x = -\frac{127}{128}$$

$$-\frac{1}{128}x = -\frac{127}{128} \left| : \left(-\frac{1}{128}\right) \right.$$

$$x = 127$$

Saime õunte arvuks 127. Kontrollige saadud tulemust iseseisvalt (teksti põhjal)!

Vastus. Aednikul oli 127 õuna.

- 8) **Puu kõrguse aastane juurdekasv on 10% võrra väiksem eelmise aasta juurdekasvust. Leia puu kõrguse kolme järgneva aasta juurdekasv, kui vaadeldaval aastal oli juurdekasv 40 cm.** (*L. Lepmann, T. Lepmann, H-M. Varul Ülesandeid gümnaasiumi matemaatika lõpueksamiks valmistumisel, Koolibri*)

Lahendus. Tegemist on geomeetrilise jadaga, mille tegur on $1 - 0,1 = 0,9$. Jada esimene liige on $a_1 = 40$ (cm). Leiame nelja esimese liikme summa (esimene aasta ja lisaks kolm järgnevat aastat) $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_4 = \frac{40 \cdot (0,9^4 - 1)}{0,9 - 1} = 137,56$.

Kuna küsitakse teise kuni neljanda aasta juurdekasvu, siis $137,56 - 40 = 97,56$ (cm). Vastus. Puu kõrguse kolme järgneva aasta juurdekasv on 97,56 cm.

- 9) *Riigieksam 1999 (15p.)* **Tööpink maksab uuena 40000 krooni ja tema väärtus väheneb iga-aastaga 5% võrra aasta alguses olnud väärtusest.**
 a) **Kui suur on selle tööpingi väärtus 4 aasta pärast?**
 b) **Mitme aasta pärast on tööpingi väärtus tema esialgselt väärtusest kaks korda väiksem?**

Lahendus. Tegemist on liitintressi ülesandega, kuid ülesande võib lahendada ka, kui geomeetrilise jada ülesande, kus esimene liige on $a_1 = 40000$ ja jada tegur $q = 1 - 0,05 = 0,95$. Leida tuleb selle jada viies liige (4 aasta pärast) a_5 .

Kasutame geomeetrilise jada üldliikme valemit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$$a_5 = 40000 \cdot 0,95^{5-1} = 32580,25 \approx 33000 \text{ (krooni)}$$

Ka teine pool ülesandest on liitintressi ülesanne, kuid kasutame siingi geomeetrilise jada üldliikme valemit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$$20000 = 40000 \cdot 0,95^{n-1} \Rightarrow 0,95^{n-1} = 0,5 \Rightarrow (n-1)\log 0,95 = \log 0,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 0,5}{\log 0,95} + 1 \approx 14,513 \approx 14$$

Vastus. Tööpingi väärtus 4 aasta pärast on ligikaudu 33000 krooni. Ligikaudu 14 aasta pärast on tööpingi väärtus tema esialgselt väärtusest kaks korda väiksem.

- 10) **Kolm arvu, mille summa on 52, moodustavad geomeetrilise jada. Kui keskmisele arvule liita 8, siis moodustavad arvud aritmeetilise jada. Leidke need arvud.**

Lahendus. Ülesande andmetest lähtuvalt on esimese kolme liikme summa 52, st.

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 52.$$

Kui teisele liikmele liita 8, st. $a_1q + 8$, siis saame aritmeetilise jada, st. jada, kus iga järgneva ja talle eelneva liikme vahe on jääv. Saame $a_1q + 8 - a_1 = a_1q^2 - a_1q - 8$.

Saime võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 52 \\ -a_1 + 2a_1q - a_1q^2 = -16 \end{cases}$$

Kasutame lahenduseks liitmisvõtet ja selle tulemusena saame võrrandi

$$3a_1q = 36 \mid : 3$$

$$a_1q = 12 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{q}$$

Asendame saadud tulemuse esimesesse võrrandisse

$$\frac{12}{q} + 12 + \frac{12}{q} \cdot q^2 = 52 \mid \cdot q \neq 0$$

$$12 + 12q + 12q^2 = 52q$$

$$12q^2 - 40q + 12 = 0 \mid : 4$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$q = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$q_1 = 3$$

$$q_2 = \frac{1}{3}$$

Kui $q = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{3} = 4$. Saame jada liikmeteks 4, 12 ja 36.

Kui $q = \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{12}{\frac{1}{3}} = 36$. Saame jada liikmeteks 36, 12 ja 4.

Vastus. Need arvud on 4, 12 ja 36.

11) Riigieksam1997 (15p.) Vabal langemisel läbib keha esimeses sekundis 4,9 m ja igas järgnevas sekundis 9,8 m rohkem kui eelmises. Leidke aeg, mis kulub kehal maapinnale langemiseks 4410 m kõrguselt.

Lahendus. Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige $a_1 = 4,9$ ja jada vahe $d = 9,8$ ning jada summa $S_n = 4410$. Leida tuleb aeg, mis osutub jada liikmete arvuks n . Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$4410 = \frac{2 \cdot 4,9 + (n-1) \cdot 9,8}{2} \cdot n \Rightarrow$$

$$8820 = 9,8n + 9,8n^2 - 9,8n$$

$$9,8n^2 = 8820$$

$$n^2 = 900$$

$$n = \pm 30$$

Negatiivne lahend on ei sobi, kuna n tähistab aega.

Vastus. Aeg, mis kulub kehal maapinnale langemiseks on 30 sekundit.

12) 1980.a. hinnati maakera kivisöe varuks 660 miljardit tonni. Kivisütt arvati jätkuvat 200 aastaks. Samast ajast alates on kivisöe kulutamine kasvanud igal aastal 4% võrra. Mis aastal kivisöe varud lõppevad, kui kulutused jätkuvad samas tempos?

Lahendus. Ülesande andmete põhjal kulutatakse aastas umbes $660 : 200 = 3,3$ miljardit tonni kivisütt. Kuna tegemist on geomeetrilise jadaga, siis $a_1 = 3,3$ ja jada tegur $q = 1,04$ ($100\% + 4\%$). Kivisöevarud ehk $S_n = 660$. Kasutades jada summa

valemit $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ saame

$$660 = \frac{3,3(1,04^n - 1)}{1,04 - 1} \Rightarrow$$

$$660 = \frac{3,3(1,04^n - 1)}{0,04} \mid \cdot 0,04$$

$$3,3(1,04^n - 1) = 26,4 \mid : 3,3$$

$$1,04^n - 1 = 8$$

$$1,04^n = 9 \mid \log$$

$$n = \frac{\log 9}{\log 1,04} \approx 56$$

Saime, et kivisütt jätkub selliste andmete korral ligikaudu 56 aastaks ehk aastani 2036.

Vastus. Kivisütt jätkub ligikaudu 56 aastaks.

13) Riigieksam 2000 (15p.) Vaatleme kõiki kolmekohalisi arve, mis jagamisel neljaga annavad jäägi üks.

a) Kirjuta kolm esimest ja kolm viimast sellist arvu.

b) Leia kõikide selliste arvude summa.

c) Leia kõikide kolmekohaliste arvude summa.

d) Mitu protsenti punktis b) leitud summa moodustab punktis c) leitud summast?

Lahendus. Kuna tegemist on aritmeetilise jadaga, kus jada vahe on $d = 4$, siis kolm esimest arvu on 101, 105, 109 ja kolm viimast arvu 989, 993, 997.

Jada liikmete arvu saame aritmeetilise jada üldliikme valemist

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

$$a_n = 997$$

$$a_1 = 101$$

$$d = 4$$

$$997 = 101 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow 900 = 4n \Rightarrow n = 225$$

Summa leidmiseks kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{101 + 997}{2} \cdot 225 = 123525$$

Kolmekohalisi arve on 900.

$$S_{900} = \frac{100 + 999}{2} \cdot 900 = 494550$$

Arv 123525 moodustab arvust 494550

$$\frac{123525}{494550} \cdot 100\% \approx 24,977\% \approx 25\%$$

Vastus. Need arvud on 101, 105, 109 ja 989, 993, 997. Selliste arvude summa on 123525. Kõikide kolmekohaliste arvude summa on 494550. Punktis b) leitud summa moodustab punktis c) leitud summast ligikaudu 25%.

14) Riigieksam 2004 (10p.) Teibilint paksusega 0,2 mm on keritud silindrikujulisele südamikule, mille raadius on 1 cm. Teibirulli läbimõõt on 6 cm. Leidke teibilindi pikkus täpsusega 0,5 m.

Näpunäide. Lähtuge sellest, et küllalt suure täpsusega võib iga rullis oleva teibikihi ristlõike lugeda ringjooneks, kusjuures iga järgmise kihi raadius on 0,02 cm võrra suurem kui eelmisel. Seega on esimeses kihis 2π cm teipi, teises kihis $2,04\pi$ cm jne.

Lahendus. Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus kihtide arv on

$$n = \frac{2}{0,02} = 100. \text{ Jada esimene liige on } a_1 = 2 \cdot \pi \cdot r, \text{ kus } r = 1. \text{ Kuna jada teine}$$

liige $a_2 = 2,04 \cdot \pi \cdot r = 2,04\pi$, siis jada vahe on $d = 2,04\pi r - 2\pi r = 0,04\pi$.

Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2 \cdot 2\pi + (100-1) \cdot 0,04\pi}{2} \cdot 100 = 1249,7(\text{cm}) \approx 12,5(\text{m})$$

Vastus. Teibilindi pikkus on ligikaudu 12,5 meetrit.

15) Kaks keha alustavad teineteisele lähenemist 38 m kauguselt. Esimeses sekundis läbivad mõlemad kehad 1 m, igas järgmises sekundis läbib üks keha 2 m rohkem ja teine 3 m rohkem kui eelmises sekundis. Mitme sekundi pärast kehad kohtuvad?

Lahendus. Oletame, et kehad kohtuvad x sekundi pärast. Kuna läbitud teepikkused moodustavad aritmeetilise jada, siis võime leida teepikkused jada summa valemiga

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n, \text{ kus}$$

I keha jaoks $a_1 = 1(\text{m})$ ja $d = 2(\text{m})$, $n = x(\text{s})$

$$S_{\text{esimene}} = \frac{2 \cdot 1 + (x-1) \cdot 2}{2} \cdot x = \frac{2x}{2} \cdot x = x^2.$$

II keha jaoks $a_1 = 1(\text{m})$ ja $d = 3(\text{m})$, $n = x(\text{s})$

$$S_{\text{teine}} = \frac{2 \cdot 1 + (x-1) \cdot 3}{2} \cdot x = \frac{3x-1}{2} \cdot x = 1,5x^2 - 0,5x.$$

Kuna kehad x sekundi pärast kohtuvad, siis peab mõlema poolt läbitud teepikkus olema kokku 38 m.

$$x^2 + 1,5x^2 - 0,5x = 38$$

$$2,5x^2 - 0,5x - 38 = 0 \cdot 2$$

$$5x^2 - x - 76 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 5 \cdot 76}}{10} = \frac{1 \pm 39}{10}$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -3,8 \text{ ei sobi}$$

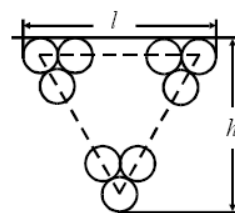
Kontrollige saadud tulemusi mõlema keha jaoks iseseisvalt!

Vastus. Kehad kohtuvad 4 sekundi pärast.

ÜLESANDED

- 1) Lõpmatult kahaneva geomeetrilise jada liikmete summa on 4. Nende kuupide summa on $64/7$. Leia esimene liige ja tegur. **V:** $a_1 = 2, q = 0,5$
- 2) Aritmeetilise jada neljanda, kaheksanda, kaheteistkümnenda ja kuuteistkümnenda liikme summa on 500. Leia esimese 19 liikme summa. **V:** 2375
- 3) Neli arvu on geomeetrilise jada järjestikusteks liikmeteks. Kui nendest lahutada vastavalt 2;1;7 ja 27 saame aritmeetilise jada järjestikused liikmed. Leia need arvud. **V:** 7; 14; 28; 56
- 4) Kolme arvu summa on 217. Need arvud on teatava geomeetrilise jada kolm järjestikust liiget ja teatava aritmeetilise jada 2., 9. ja 44. liige. Mitu esimest liiget tuleb võtta sellest aritmeetilisest jadast, et nende summa oleks 820? **V:** 20 liiget
- 5) *Riigieksam 1998*. Puuraugu tegemisel maksti esimese meetri puurimise eest 300 kr ja iga järgmise meetri eest 200 kr rohkem kui eelmise eest. Koos preemiaga, mis oli 2000 krooni, maksti puuraugu tegemise eest 11900 kr. Leia puuraugu sügavus. **V:** 9m
- 6) *Riigieksam 1999*. Metsalangil arvatakse olevat 6500 m^3 puitu. Puidu iga-aastane juurdekasv on keskmiselt 2%.
 - a) Kui palju on sellel metsalangil puitu 4 aasta pärast?
 - b) Mitme aasta pärast puidu kogus sellel langil kahekordistub? **V:** $6500 \cdot 1,02^4 \approx 7000 \text{ m}^3$; 35 aasta pärast
- 7) *Riigieksam 2000*. Vaatleme kõiki kolmekohalisi arve, mis jagamisel kolmega annavad jäägi kaks.
 - a) Kirjuta kolm esimest ja kolm viimast sellist arvu. **V:** 101, 104, 107 ja 992, 995, 998
 - b) Leia kõikide selliste arvude summa. **V:** 164850
 - c) Leia kõikide kolmekohaliste arvude summa. **V:** 494550
 - d) Mitu protsenti punktis c) leitud summa moodustab punktis b) leitud summast? **V:** 300%
- 8) *Riigieksam 2002*. Metsatükil on hinnanguliselt 15 000 tihumeetrit TM puitu. Raie käigus saeti maha 8% sellest kogusest.
 - a) Mitu tm puitu jäi pärast raiet alles?
 - b) Mitmendal aastal pärast raiet on sellel metsatükil jälle 15 000 tm puitu, kui puidu iga-aastane juurdekasv on keskmiselt 2%? **V:** 13 800 tm; 5. aastal

- 9) *Riigieksam 2002*. Peeter võitis lotoga 150 000 krooni. Esimesel kuul kulutas ta 2% võidetud summast.
- Mitu krooni oli Peetril esimese kuu lõpus alles?
 - Igal järgneval kuul kulutas Peeter kolm korda rohkem raha kui eelmisel. Leia, mitme kuu möödudes loteriivõidust on Peetril alles 30 000 krooni. **V:** 147 000 kr.; 4 kuu pärast.
- 10) *Riigieksam2005* Kui suur peab vähemalt olema hoiuse algväärtus, et intressimäära 5% korral (eeldusel, et see aastatega ei muutu) hoius kasvaks 15 aasta jooksul vähemalt 10 000 kroonini. Vastus andke täpsusega 1 kroon. **V:** (liitintressi valemiga) 4810 kr.
- 11) *Riigieksam2006* Kaablitrassi torude ristlõige on ring diameetriga d . Torud on laotud harkide vahele, nii et esimeses kihis on üks toru ja iga järgmise kihi kaks toru puudutavad eelmise kihi ühte toru (vt joonist). Kõige ülemises kihis on m toru.
- Avaldage
 - ülemise kihi laius l ; **V:** $m \cdot d$
 - torude virna kõrgus h ; **V:** $\frac{d(m\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2)}{2}$
 - torude arv virnas. **V:** $\frac{m(m+1)}{2}$
 - Arvutage torude virna kõrgus, kui toru ristlõike raadius on 6 cm ja kõige ülemises kihis on 21 toru. **V:** 220 cm



- 12) *Riigieksam2007* Külmas toas, kus temperatuur oli 0°C , lülitati sisse radiaator ning toa temperatuur hakkas tõusma. Esimese tunniga tõusis temperatuur 5 kraadini. Alates teisest tunnist oli iga tunni ja sellele vahetult eelneva tunni jooksul toimunud temperatuurimuutuste jagatis jääv suurus q . Kolmanda tunni lõpuks oli toas 10 kraadi sooja.

- Arvutage konstant q .
- Kui soojaks läheb see tuba tundide arvu tõkestamatul kasvamisel?

$$\mathbf{V: } q = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618; \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2} \approx 13,1^\circ.$$

- 13) *Riigieksam2008* Kuulike lükatakse veerema mööda kaldpinda allapoole. Alates teisest sekundist veereb kuulike iga sekundiga eelmise sekundi jooksul läbitud teepikkusest ühe ja sama pikkuse võrra rohkem. Teise sekundi lõpuks oli kuulikese kaugus lähtepunktist $l_2 = 9 \text{ cm}$ ja neljanda sekundi lõpuks oli kuulike lähtepunktist kaugusel $l_4 = 30 \text{ cm}$. Mitmenda sekundi lõpuks jõuab kuulike kaldpinna lõppu, mis asub lähtepunktist kaugusel $L = 900 \text{ cm}$?

- 14) *Riigieksam2009* Kaks kiirabiautot alustavad üheaegselt sõitu teineteise poole – üks auto haiglast sündmuskohale, teine sündmuskohalt haiglasse. Esimese minutiga läbivad mõlemad autod 1 km. Iga järgmise minutiga läbib üks auto $\frac{1}{6}$ km võrra ja teine $\frac{1}{12}$ km võrra pikema teelõigu kui eelmise minutiga. Mitme minuti pärast autod kohtuvad ja mis on autode kiirused ($\frac{km}{h}$) kohtumishetkel, kui sõitu alustades on nad teineteisest 23 km kaugusel?

V: 8 min; 130 km/h ja 95 km/h

- 15) *Riigieksam2010* Kaks keha liikusid sirgjooneliselt.

- a) Esimese keha poolt iga sekundi jooksul läbitud teepikkused moodustasid aritmeetilise jada. Esimese sekundiga läbis keha 63 mm ja kolmanda sekundi lõpuks oli tal läbitud 25,2 cm pikkune teelõik. Leidke vahemaa, mille esimene keha läbis liikumise neljandal sekundil.
- b) Teine keha läbis teisest sekundist alates igas sekundis sama arv korda pikema teelõigu kui eelmises sekundis. Esimese kolme sekundiga läbis keha 304 mm, neljanda sekundiga aga 15,2 cm võrra pikema teelõigu kui esimese sekundiga. Leidke aeg, mis kulus teisel kehal 205,9 cm läbimiseks.

V: 12,6 cm; 7 sek

- 16) *Riigieksam2013*

- a) Kasvava aritmeetilise jada neljanda ja esimese liikme jagatis on 7 ning kuuenda ja kolmanda liikme korrutis on 220. Leidke selle aritmeetilise jada esimene liige.
- b) Hääbuva geomeetrilise jada kõikide liikmete summa on 312 ning esimene liige on 234. Leidke selle jada tegur ja kolmas liige. V: $a_1=2$; $q=0,25$; $a_3=14,625$.

-
- 17) *Riigieksam2014*

1. Oksjonil müüdi maali alghinnaga 150 eurot. Nii esimene kui ka iga järgmine hinnapakkuja suurendas panust ühe ja sama summa võrra. On teada, et kümnes pakkumine oli 1400 eurot ning maali ostis kolmekümnenda pakkumise teinud osaleja. Mis hinnaga osteti maal?
2. Samal oksjonil müüdi antiikese, mille ostuhind oli 2500 eurot. Eksperdi hinnangul oli eseme tegelik väärtus vaid 1900 eurot. Eksperdi hinnangul tõuseb eseme väärtus 4% aastas. Mitu aastat peaks oksjoni toimumisest mööduma, et eseme tegelik väärtus ja ostuhind oleksid võrdsed? V: $a_{31}=3900$ (eurot); ligikaudu 7 aastat.

- 18) *Riigieksam2015*

Perekond Mänd jälgis 2013. aasta 1. jaanuarist 2014. aasta 31. detsembrini, kui palju kulus neil raha toidukaupade ostmiseks. Selgus, et vaadeldud perioodil kulus perel igas kuus ühe ja sama summa võrra rohkem raha kui eelmises kuus.

- a) 2013. aasta esimese kolme kuu jooksul kulus perel toidukaupade ostmiseks kokku 796,5 eurot ja 2014. aasta märtsis 285 eurot. Kui palju raha kulus perel toidukaupade ostmiseks 2014. aasta detsembris?
- b) Mitu eurot kulus perel vaadeldud perioodil toidukaupade ostmiseks keskmiselt ühes kuus?
- c) Mitme protsendi võrra oli 2014. aasta detsembrikuu kulu suurem 2013. aasta jaanuarikuul kulus? V: 298,5€; 281,25€; ligikaudu 13%.

19) Riigieksam2016(10p) Firma tegeles aiamarjade kokkuostu ja nende edasimüügiga.

1. Kokkuostuperioodi esimesel nädalal ostis firma 1250 kg marju ja igal järgmisel nädalal 20% võrra rohkem kui eelmisel nädalal. Mitu kilogrammi marju ostis firma kokku nelja nädalaga?

2. Kokkuostetud marjadest 6260 kg müüdi ära. Esimesel nädalal müüdi 941 kg marju, igal järgmisel nädalal aga eelmise nädalaga võrreldes ühe ja sama koguse võrra vähem. Mitme kilogrammi võrra vähenes marjade müük igal nädalal, kui 10 nädalaga müüdi ära kõik marjad? V: 6710 kg; 70 kg.

20) Riigieksam2017K(5p) Kaks aastat tagasi võitis Mart loteriiga 5000 eurot. Ta otsustas panna selle raha kaheks aastaks pangahoiusele, millelt makstav intressimäär oli 0,6% aastas. Mitu eurot rohkem oleks Mart sama perioodiga intressidena teeninud, kui hoiuse intressimäär oleks olnud 10 korda kõrgem?

a) V: 557,82 eurot

21) Riigieksam2017K(10p) Aritmeetilise jada vahe on 25 ja seitsmes liige 195.

a) Leidke selle jada esimese seitsme liikme summa.

b) Mitmes liige selles jadas ületab esimesena arvu 5000? Leidke see jada liige.

V: 1. $S_7 = 840$ 2. $a_{200} = 5020$

22) Riigieksam2017L(10p)

Kasvava aritmeetilise jada kolmanda ja seitsmenda liikme summa on 350 ning viienda ja neljanda liikme vahe on 35.

a) Arvutage selle jada üheksas liige ja esimese üheksa liikme summa.

b) Üks selle jada liige a_n moodustab täpselt 10% esimese n liikme summast.

Mitmes jada liige on a_n ? V: $a_9 = 315$; $S_9 = 1575$; 2. 19. liige.

23) Riigieksam2018L(10p)

Kaupluses on müügil 41 pärlist koosnev kaelakee, mille keskmine pärl on kõige suurem ja kõige kallim. Keskmisest pärlist kee kummagi otsa poole liikudes on iga järgmine pärl eelmisest ühe ja sama summa võrra odavam. Kõige kallim pärl maksab 55 eurot ja sellest ülejäägid 52 eurot.

a) Kui palju maksab üks kõige odavamatest pärlitest?

b) Kui palju maksab see kaelakee, st kõik pärlid kokku?

c) Ühel kaelakee pärlitest tekkis mõra ja selle pärl hind vähenes $\frac{1}{5}$ võrra. Kaelakee

hind vähenes seetõttu 6,5 euro võrra. Kui palju maksis see pärl enne mõra tekkimist? V: 25€; 1625€; 32,5€.

24) Riigieksam2018K(10p)

Tehas valmistab esimese nelja aastaga 9700 toodet. On teada, et tootmine kasvas igal aastal ühe ja sama arvu toodete võrra ning kolmanda ja neljanda aastaga valmistati kokku 1400 toodet rohkem kui kahe esimese aastaga.

a) Mitu toodet valmistati 3. aastal?

b) Tootmine kasvas samas tempos. Mitu aastat kulus 16 650 toote valmistamiseks?

V: 2600; 6 a.

25) Riigieksam2018L(10p)

Uus aiatraktor maksab 30 000 eurot. Selle traktori hind väheneb iga aastaga ühe ja sama protsendi võrra ning kahe aasta pärast maksab aiatraktor 26 508 eurot.

1. Mitme protsendi võrra väheneb iga. Aastal aiatraktori hind?

2. Mis on selle aiatraktori hind 5 aasta pärast? Vastus ümarda täpsusega 10 eurot.

3. Mis aasta lõpuks on aiatraktori hind vähemalt poole väiksem alghinnast? V:

6%; 22020 €; 12. aasta lõpuks.

26) Riigieksam2019L(5p) Bussifirma kasutab piletimüügisüsteemi, kus iga viie pileti müümise järel tõuseb bussipileti hind ühe euro võrra. Õhtul väljuvale bussile on müüdud 25 piletit ja nende piletite müügist kokku on saadud 155 eurot. Kui palju maksis kõige odavam sellele bussile müüdud pilet? *V: 4,2 eurot*

27) Riigieksam2019K(10p) Telemängu „Mis? Kus? Millal?” ühes võistkonnas on kuus liiget, kelle kõigi vanusest täisaastates moodustub aritmeetiline jada. Kahe vanema liikme vanuse summa on viis korda suurem kõige noorema liikme vanusest. Selle võistkonna kõigi liikmete vanuse summa on 264 aastat.

1. Kui vana on selle võistkonna kõige vanem liige?
2. Mis on selle võistkonna liikmete keskmine vanus? *V: 64 a; 44 a.*

28) Riigieksam2020K(10p) Aritmeetilise jada viies liige on 19. Selle jada esimese kolme liikme summa on 30.

1. Arvutage selle jada esimene liige ja jada vahe.
2. Arvutage selle jada sajas liige ja esimese saja liikme summa. *V: Selle jada esimene liige on 7 ja jada vahe on 3; Selle jada 100. liige on 304 ja esimese saja liikme summa on 15 550.*

29) Riigieksam2020L(5p) On antud aritmeetiline jada 7; 11; ...; 335.

Arvutage selle jada kõikide liikmete summa. *V: 14 193*

30) Riigieksam2021L(10p) 1. aprillil esitati uut arvutimängu ja juba esimesel päeval laaditi mängu arvukalt alla. Alates 2. aprillist kasvas mängu allalaadimiste arv eelmise päevaga võrreldes ühe ja sama arvu võrra. On teada, et 10. aprillil oli allalaadimisi 2 korda rohkem kui 4. aprillil ja esimese 15 päevaga oli uue mängu allalaadimiskordi kokku 1800.

1. Mitmel korral laaditi mäng alla esitluspäeval?
2. Analüüs näitas, et esimese kahe kuu jooksul oli kolm järjestikust päeva, mille jooksul laaditi mängu alla kokku 1800 korda. Mis kuupäevadel see nii oli? *V: 36 korda; 17., 18. Ja 19. mail.*

31) Riigieksam2021K(10p) Aritmeetilise jada vahe on $\frac{2}{3}$ ja geomeetrilise jada tegur

on $\frac{2}{3}$. Nii aritmeetilise jada neljas liige kui ka geomeetrilise jada teine liige on 9.

1. Arvutage mõlema jada 1. liige.
2. Arvutage aritmeetilise jada 6. liige ja esimese kuue liikme summa.
3. Arvutage geomeetrilise jada kolmanda ja kuuenda liikme summa. *V: 7 ja 13,5; $10\frac{1}{3}$ ja 52; $7\frac{7}{9}$.*

32) Riigieksam2021K(5p) Vaatluse käiguse selgus, et bakteritega kaetud ala suureneb iga tunniga 18%. Vaatluse alguses oli bakteritega kaetud ala suurus 4 cm².

- a) Arvutage, kui suur pindala on bakteritega kaetud 3 tunni möödudes.
- b) Mitu tundi on möödunud vaatluse algusest, kui bakteritega kaetud pindala on 15 cm²? Vastus ümardage ühelisteni. *V: 6,6 cm²; 8 tundi*

33) Riigieksam2022L(5p) Kulumise tõttu kaotab auto igal aastal 15% oma väärtusest. Neli aastat pärast ostmist on auto väärtus 26100 eurot. Arvutage auto ostuhind. Mitme euro võrra väheneb auto väärtus esimese aasta lõpuks?

V: Auto ostuhind oli 49999,40 €; Esimese aasta lõpuks väheneb hind 7499,91 € võrra.

34) Riigieksam2022L(10p) Väikeettevõtjaga sõlmiti kokkulepe vähemalt 160 toote valmistamiseks ning fikseeriti ühe valmistatud toote eest makstav algne hind. Lisaks lepiti kokku tasustamisviis juhuks, kui ettevõtjal õnnestub sama aja jooksul valmistada rohkem tooteid. Sellisel juhul makstakse talle 161. toote eest 8 eurot ja 50 senti ning seejärel iga järgmise toote eest 50 senti rohkem kui eelmise eest. Valmistades 180 toodet, teeniks ettevõtja 1385 eurot.

1. Leidke ühe toote algne hind.
2. Kui palju makstakse ettevõtjale toodangu eest kokku juhul, kui viimase toote hind on 4 korda algsest hinnast suurem?

V: Ühe toote algne hind on 7 eurot. Ettevõtjale makstakse kokku 1850 eurot.

35) Riigieksam2022K(10p) Mängu alguses on igal osalejel 200 punkti. Iga õnnestunud käigu korral saab mängija 5 punkti juurde. Esimese ebaõnnestunud käigu puhul võetakse mängijalt 3 punkti maha, iga järgmise ebaõnnestunud käigu korral võetakse maha 0,5 punkti rohkem kui eelmisel korral.

1. Maria tegi mängu käigus 18 õnnestunud käiku ja 18 ebaõnnestunud käiku. Mitu punkti oli Marial mängu lõpus?
2. Peeter kaotas mängu jooksul ühe ebaõnnestunud käigu eest 18 punkti. Mitmes ebaõnnestunud käik see tal oli?
3. Joosep tegi mängu alguses järjest 18 ebaõnnestunud käiku. Seejärel tegi ta ainult õnnestunud käike ja sai mängu lõpuks 234,5 punkti. Mitu õnnestunud käiku tegi ta mängu jooksul?

V: Marial oli mängu lõpus 159,5 punkti. See oli 31. ebaõnnestunud käik. Joosep tegi 33 õnnestunud käiku.

