

## KORDAMINE RIIGIEKSAMIKS V teema

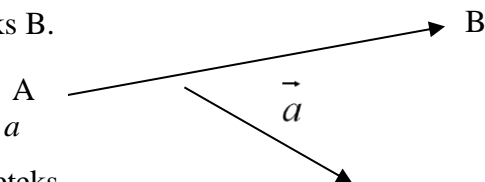
### Vektor. Joone võrrandid.

#### 1. Vektoriaalseid suuruseid iseloomustavad

- siht
- suund
- pikkus

2. Vektoriks nimetatakse suunatud sirglõiku.

3. Vektori  $\overrightarrow{AB}$  alguspunktiks on A ja lõpp-punktiks B.



4. Vektorit võib tähistada ka väiketähega, näiteks  $a$

5. Paralleelseid vektoreid nimetatakse kollineaarseteks.

6. Samasihilised vektorid on kas samasuunalised ( $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ) või vastassuunalised ( $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$ ).

#### 7. Kaks vektorit on võrdsed, kui nad on

- kollineaarsed
- samasuunalised
- võrdse pikkusega.

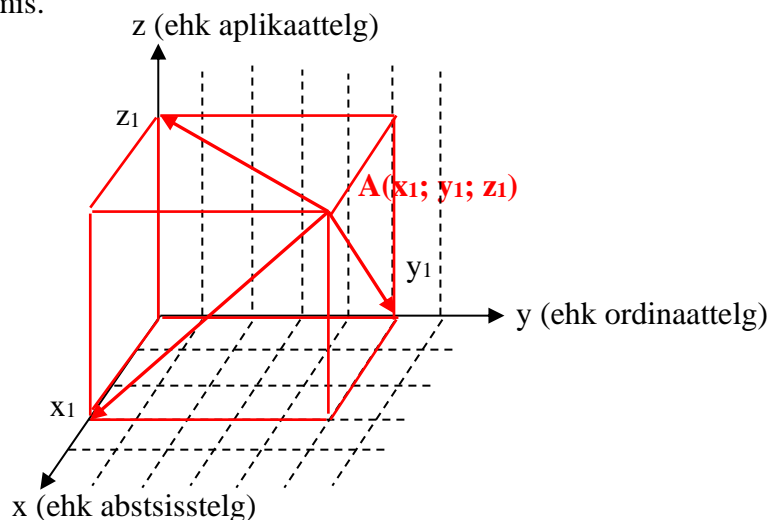
11) Vektori, mille alguspunkt on  $A(x_1; y_1; z_1)$  ja lõpp-punkt  $B(x_2; y_2; z_2)$ , **koordinaadid leitakse**

**valemiga**  $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$  **ning pikkus** |

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(s.o. ka kahe punkti vaheline kaugus d).

12) Punkti koordinaadid ruumis.



13) Vektorite  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$  ja  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$  **liitmine või lahutamine**

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2).$$

**14) Vektori korrutamine arvuga**  $k \cdot \vec{a} = (k \cdot x_1; k \cdot y_1; k \cdot z_1)$ , kus  $k \neq 0$ .

Kui  $k > 0$ , siis  $k \cdot \vec{a}$  on vektoriga  $\vec{a}$  samasuunaline;

Kui  $k < 0$ , siis  $k \cdot \vec{a}$  on vektoriga  $\vec{a}$  vastassuunaline.

**15) Kaks vektorit**  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$  ja  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$  on kollineaarsed

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

**Näide.** Kontrollime, kas vektorid  $\vec{a} = (6; -2; -18)$  ja  $\vec{b} = \left(-4; 1\frac{1}{3}; 12\right)$  on kollineaarsed.

Leiame vastavate koordinaatide suhted  $\frac{-4}{6} = \frac{1\frac{1}{3}}{-2} = \frac{12}{-18}$ . Kõik need suhted annavad

tulemuseks  $-\frac{2}{3}$  ja kuna suhted on võrdsed, siis on tegemist kollineaarsete vektoritega.

**16) Kahe vektori**  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$  ja  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$  skalaarkorrutis  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ , kus

$\varphi$  on nurk nende vektorite vahel või koordinaatides  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ .

**Nurk vektorite vahel**  $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .

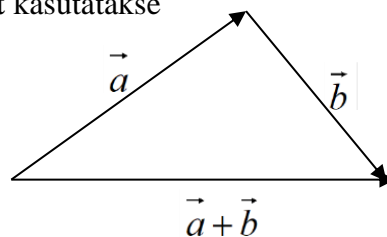
Kahe vektori ristseisu tunnus  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ .

**Näide.** Kontrollime, kas vektorid  $\vec{a} = (3; 2; -8)$  ja  $\vec{b} = (-2; 1; -0,5)$  on risti.

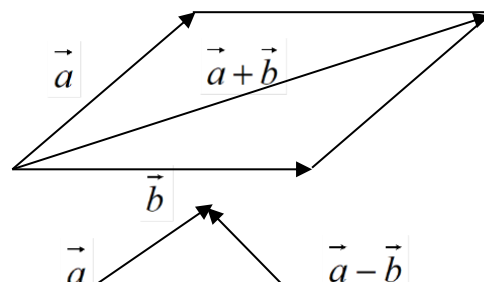
Leiame skalaarkorrutise  $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-8) \cdot (-0,5) = 0$ , st. vektorid on teineteisega risti.

**17) Vektorite liitmiseks geomeetriliselt** kasutatakse

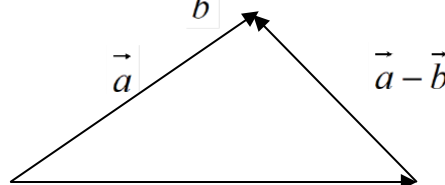
a) kolmnurga reeglit;



b) või rööpküliku reeglit.



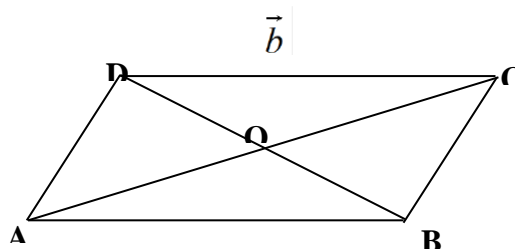
**18) Vektorite lahutamine geomeetriliselt**



**Näide.** Leiame jooniselt

$$\vec{AB} - \vec{OC} = \vec{AB} - \vec{AO} = \vec{OB}$$

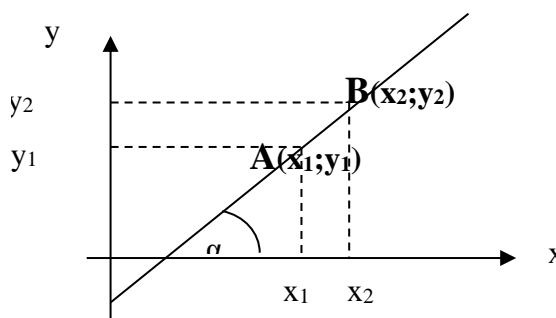
$$\vec{BC} + \vec{OA} = \vec{BC} + \vec{CO} = \vec{BO}$$



## JOONE VÖRRANDID SIRGE VÖRRANDEID TASANDIL.

Sirge tõusunurgaks nimetatakse nurka x- telje positiivse suuna ja sirge vahel. **Sirge tõusuks** nimetatakse tõusunurga

tangensit  $k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .



a) **Punkti ja tõusuga määratud sirge võrrand**  $y - y_1 = k(x - x_1)$ .

**Näide.** Kirjutame sirge võrrandi, kui sirge läbib punkti A(-3;2) ja tõus  $k = -5$ . Saame võrrandi  $y - 2 = -5(x + 3)$ .

b) **Tõusu ja algordinaadiga sirge võrrand**  $y = kx + b$ .

**Näide.** Kirjutame sirge võrrandi, kui sirge algordinaat  $b = 2$  ja tõus  $k = 4$ . Saame võrrandi  $y = 4x + 2$ .

c) **Kahe punktiga määratud sirge võrrand**  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ .

**Näide.** Kirjutame sirge võrrandi, kui sirge läbib punkte A(-3;2) ja B(-4;-1)

Saame võrrandi  $\frac{x + 3}{-4 + 3} = \frac{y - 2}{-1 - 2} \Rightarrow \frac{x + 3}{-1} = \frac{y - 2}{-3}$ .

d) **Sirge võrrand telglõikudes**  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

**Näide.** Kirjutame sirge võrrandi, kui sirge lõikab x-telge punktis (-4;0) ja y-telge punktis (0;3). Saame võrrandi  $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$ .

e) **x-teljega paralleelse sirge võrrand**  $y = a$ .

**Näide.** Kirjutame x-teljega paralleelse sirge võrrandi, kui sirge läbib punkti K(3;-2). Saame võrrandi  $y = -2$ .

f) **y-teljega paralleelse sirge võrrand**  $x = b$ .

**Näide.** Kirjutame y-teljega paralleelse sirge võrrandi, kui sirge läbib punkti R(-3;2). Saame võrrandi  $x = -3$ .

g) **Punkti ja sihivektoriga määratud sirge võrrand**  $\frac{x - x_1}{s_x} = \frac{y - y_1}{s_y}$ .

**Näide.** Kirjutame sirge võrrandi, kui sirge läbib punkti A(-5;4) ja sirge sihivektor on  $\vec{s} =$

(2;-3). Saame võrrandi  $\frac{x + 5}{2} = \frac{y - 4}{-3}$ .

h) **Sirge üldvõrrand**  $Ax + By + C = 0$ .

**Näide.** Kirjutame sirge võrrandi, kui kordajad on  $A = -4$ ,  $B = 1$ ,  $C = -2$

Saame võrrandi  $-4x + y - 2 = 0$ .

(Ruumis saame analoogilised võrrandid lisades kolmanda koordinaadi z.

Näiteks saame üldvõrrandi  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

**Kahe sirge lõikepunkti** leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Saadud lahend  $(x, y)$  on kahe sirge lõikepunktiks.

**Sirgete vastastikused asendid tasandil:**

a) Sirged on paralleelsed, kui  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} \neq \frac{C_2}{C_1}$ ;

b) Sirged ühtivad, kui  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$ ;

c) Sirged lõikuvad, kui  $\frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1}$

**Sirged on risti, kui nende tõusude korrutis**  $k_1 \cdot k_2 = -1$ .

Tõusude abil saame leida ka **nurga sirgete vahel**  $\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$ , kus  $\varphi$  on teravnurk

antud sirgete vahel.

**RINGJOONE VÕRRAND** avaldub kujul  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , kus ringjoone keskpunkt on  $O(a; b)$  ja raadius  $r$ .

Kui ringjoone keskpunkt asub koordinaatide alguspunktis, siis saame võrrandi kujul  $x^2 + y^2 = r^2$ .

**PARABOOLI VÕRRAND** – leiad materjalid ruutfunktsiooni graafiku teema alt.

**NÄITEÜLESANDED.**

1) Leia vektori  $\overrightarrow{AB}$  koordinaadid, kui tema otspunktid on  $A(-1;2)$  ja  $B(-5;2)$ . Leidke selle vektori pikkus.

**Lahendus.** Kasutame valemeid  $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$  ning

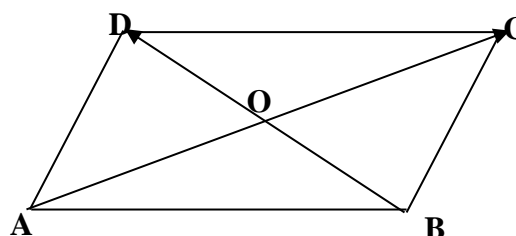
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Saame  $\overrightarrow{AB} = (-5 + 1; 2 - 2) = (-4; 0)$  ja  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$  (üh).

2) Avalda rööpküliliku ABCD diagonaalide  $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$  ja  $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$  kaudu vektorid  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$  ja  $\overrightarrow{DA}$ .

**Lahendus.**

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \vec{a}$$



$$\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

Vastus. Saime tulemuseks

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}), \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}), \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

### 3) Põhjenda, kas nelinurk K(-3,1), A(1;4), R(6;2) ja U(-1;-4) on trapets.

**Lahendus.** Nelinurk on trapets, kui tal on üks paar paralleelseid vastaskülgi. Kontrollime, kas  $\overrightarrow{KU} \parallel \overrightarrow{AR}$ . Kollineaarsuse tingimusest peavad vektorite koordinaadid olema võrdelised.

$\overrightarrow{KU} = (2;-5)$  ja  $\overrightarrow{AR} = (5;-2)$ . Kuna  $\frac{2}{5} \neq \frac{-5}{-2}$ , siis vektorid kollineaarsed ei ole. Kontrollime

nüüd kas  $\overrightarrow{KA} \parallel \overrightarrow{RU}$ ?  $\overrightarrow{KA} = (4;3)$  ja  $\overrightarrow{RU} = (-7,-6)$  ning  $\frac{4}{-7} \neq \frac{3}{-6}$ .

Vastus. Kuna nelinurgal puuduvad paralleelsed vastasküljed, siis nelinurk trapets ei ole.

### 4) Tõesta, et vektor $\vec{n} = (2;3)$ on risti sirgega $2x + 3y = 4$ .

**Lahendus.** Anname sirge võrrandile punkti ja sihivektoriga esitatud kuju  $\frac{x - x_1}{s_x} = \frac{y - y_1}{s_y}$ ,

kus  $s_x$  ja  $s_y$  on sirge sihivektori koordinaadid ning  $x_1$  ja  $x_2$  sirgel vabalt võetud punkti koordinaadid.

Teisendame sirge  $2x + 3y = 4$  võrrandit.

$$\text{Avaldame } 3y = -2x + 4 \mid :3 \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{x-2}{-\frac{1}{2}}.$$

Seega sirge sihivektor on

$$\vec{s} = \left( -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right).$$

Kontrollime vektorite ristseisu. Selleks leiame vektorite  $\vec{n}$  ja  $\vec{s}$  skalaarkorrutise

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = (2;3) \cdot \left( -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right) = 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) + 3 \cdot \frac{1}{3} = -1 + 1 = 0$$

Kuna skalaarkorrutis on null, siis vektor  $\vec{n}$  on risti ka antud sirgega  $2x + 3y = 4$ .

Vastus. Vektor  $\vec{n}$  risti sirgega  $2x + 3y = 4$ .

### 5) Lõik otspunktidega A(2;4) ja B(-4;6) on ringjoone diameetriks. Leia

a) ringjoone võrrand;

b) sellele ringjoonele punktis A joonestatud puutuja võrrand.

**Lahendus.**

Ringjoone võrrand avaldub valemiga  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ . Ringjoone keskpunktiks on lõigu AB keskpunkt. Lõigu keskpunkti koordinaatideks on otspunktide aritmeetilised keskmised. Arvutame ringjoone keskpunkti koordinaadid

$$K\left(\frac{2+4}{2}; \frac{4+6}{2}\right) \Rightarrow K(-1;5).$$

Ringi raadiuseks võtame näiteks lõigu AK. Leiame punktide A(2; 4) ja K(-1;5) vahelise kauguse AK kasutades valemit  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .

$$\text{Saame raadiuseks } r = AK = \sqrt{(2+1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ (üh).}$$

Ringjoone võrrand avaldub seega

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 10$$

Koostame nüüd raadiuse võrrandi kasutades kahe punkti vahelise sirge võrrandit

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Raadiuse otspunktid on A(2;4) ja K(-1;5), koostame raadiuseks oleva sirge võrrandi

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{-1} \Rightarrow -x-1 = 3y-15 \Rightarrow 3y = -x+14 : 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}.$$

Puutuja ja raadius on puutepunktis risti, st. vastavate sirgete tõusude korrutis  $k_1 \cdot k_2 = -1$ .

$$\text{Kuna vaadeldava sirge tõus on } k_1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow k_2 = 3.$$

Leiame nüüd puutuja võrrandi kasutades tõusu ja punktiga määratud sirge võrrandit

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

$$\text{Saame } y - 7 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 9 + 7 \Rightarrow y = 3x - 2.$$

Vastus. 1) Ringjoone võrrand on  $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 10$ .

2) Puutuja võrrand on  $y = 3x - 2$ .

## 6) Leida sirgete vastastikune asend. Lõikumise korral leia lõikepunkt.

a)  $2x - y - 3 = 0$  ja  $x + 2y - 4 = 0$

**Lahendus.** Kontrollime sirgete paralleelsust. Selleks leiame kordajate suhted  $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$ .

Seega sirged ei ole paralleelsed ning järelikult nad lõikuvad.

Leiame lõikepunkti koordinaadid. Selleks lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Kasutame lahendamiseks näiteks asendusvõtet. Teisest võrrandist  $x = 4 - 2y$ . Asendades esimesesse võrrandisse saame  $2(4 - 2y) - y = 3 \Rightarrow 8 - 4y - y = 3 \Rightarrow -5y = -5 \Rightarrow y = 1$ .

Leiame muutuja  $x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$ .

Lõikepunktiks on (2;1).

Kontrollige saadud lahendit iseseisvalt..

Vastus. Antud sirged lõikuvad ja sirgete lõikepunkt on (2;1).

b)  $x - 3y + 4 = 0$  ja  $2x - 6y + 5 = 0$ .

**Lahendus.** Kontrollime sirgete paralleelsust. Selleks leiame kordajate suhted

$$\frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{4}{5}. \text{ Seega antud sirged on paralleelsed.}$$

Vastus. Sirged on paralleelsed.

7) Leia nurk sirgete  $y = 3x + 1$  ja  $y = 2x - 7$  vahel.

**Lahendus.** Leiame nurga valemist  $\tan \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$ .

Esimese sirge tõus  $k_1 = 3$  ja teise sirge tõus  $k_2 = 2$ . Leiame

$$\tan \varphi = \left| \frac{3 - 2}{1 + 3 \cdot 2} \right| = \frac{1}{7} \Rightarrow \varphi = 8^\circ 8'$$

Vastus. Nurk sirgete vahel on  $8^\circ 8'$

8) Riigiksam 2003(15p.) Tasandil on antud 4 sirget. Esimene neist on antud võrrandiga  $y = 2x - 6$ . Teine on paralleelne esimesega ja läbib punkti  $P(1; 6)$ . Kolmas on risti esimesega ja läbib punkti  $Q(-9; 1)$ . Neljas on paralleelne x-teljega ja läbib punkti  $R(-2; 6)$ . Kolmas sirge lõikab kahte esimest sirget punktis  $A$  ja teist punktis  $B$ . Neljas sirge lõikab kahte esimest sirget punktis  $D$  ja teist punktis  $C$ . Tehke joonis ja koostage antud sirgete võrrandid.

Leidke nelinurga  $ABCD$  tippude koordinaadid. Arvutage nelinurga  $ABCD$  külgede täpsed pikkused ja pindala.

**Lahendus.**

a) Leiame teise sirge võrrandi. Kuna sirged on paralleelsed, siis nende tõusud on võrdsed ( $k_1 = k_2 = 2$ ) ja koostame punkti ning tõusuga sirge võrrandi.

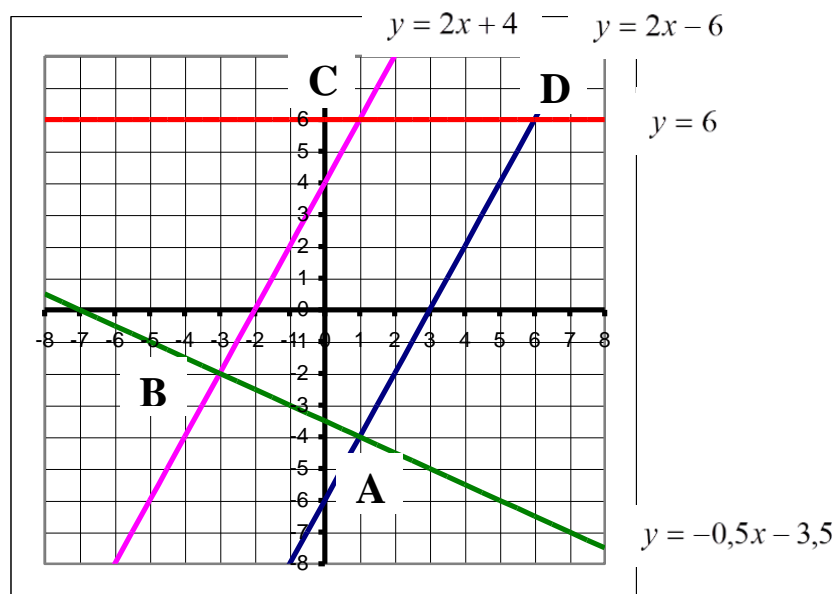
$$y - 6 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 4$$

b) Kolmas sirge on eelmistega risti, st. sirgete tõusude korrutis on

$$k_3 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow 2k_3 = -1. \text{ Seega kolmanda sirge tõus on } -0,5. \text{ Koostame võrrandi}$$

$$y - 1 = -0,5(x + 9) \Rightarrow y = -0,5x - 3,5$$

c) Neljas sirge on x-teljega paralleelne ja läbib punkti  $R(-2; 6)$ , st. võrrand avaldub kujul  $y = a$ . Saame võrrandiks  $y = 6$ .



d) Leiame nelinurga  $ABCD$  tippude koordinaadid.

Lahendame võrrandisüsteemid.

$$1) \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

Sellel võrrandisüsteemil lahendid puuduvad (sirged on paralleelsed).

$$2) \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = -0,5x - 3,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x - 6 = -0,5x - 3,5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(1; -4)$$

$$3) \begin{cases} y = -0,5x - 3,5 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -0,5x - 3,5 = 2x + 4 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(-3; -2)$$

$$4) \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x - 6 = 6 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow D(6; 6)$$

$$5) \begin{cases} y = 6 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6 = 2x + 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow C(1; 6)$$

e) Arvutame nelinurga ABCD külgede täpsed pikkused ja pindala.

$$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ (üh)}$$

$$BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ (üh)}$$

$$CD = \sqrt{(6-1)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{25+0} = \sqrt{25} = 5 \text{ (üh)}$$

$$AD = \sqrt{(6-1)^2 + (6+4)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ (üh)}$$

f) Nelinurk ABCD on täisnurkne trapets ja selle pindala avaldub

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{5\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 4,5\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 45 \text{ (üh}^2\text{)}$$

Vastus: Trapetsi ABCD külgede pikkused on  $2\sqrt{5}$  üh,  $4\sqrt{5}$  üh, 5 üh ja  $5\sqrt{5}$  üh ning pindala  $45 \text{ üh}^2$ .

9) Riigieksam2001(15p.) Nelinurga KLMN tipud on K(1;1;7), L(3;3;7), M(9;1;1) ja N(4;0;4).

1) Veenduge, et see nelinurk on trapets. Teha kindlaks, millised lõigud on selle trapetsi alusteks.

2) Selgitage, kas trapets on võrdhaarne.

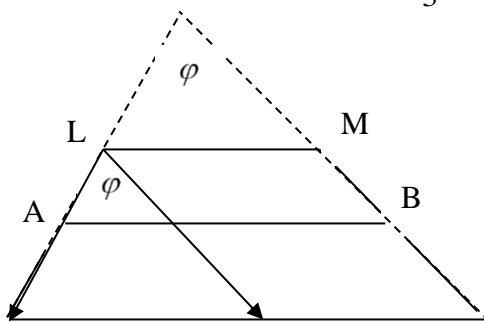
3) Leidke trapetsi kesklõigu otspunktid.

4) Leidke trapetsi haarade pikenduste vahelise nurga koosinus.

**Lahendus.** Avaldame nelinurga KLMN külgede vektorid

$$\overrightarrow{LK} = (-2; -2; 0), \overrightarrow{LM} = (6; -2; -6), \overrightarrow{MN} = (-5; -1; 3), \overrightarrow{KN} = (3; -1; -3).$$

Vektorid  $\overrightarrow{MN}$  ja  $\overrightarrow{LK}$  on kollineaarsed, kuna  $\frac{6}{3} = \frac{-2}{-1} = \frac{-6}{-3}$ .





Vektor  $\overrightarrow{MN}$  ei ole kollineaarvektoriga  $\overrightarrow{LK}$ ,

$$\text{kuna } \frac{-5}{-2} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{3}{0}.$$

Seega nelinurk KLMN on trapets, mille alusteks on LM ja KN. Haarad on KL ja NM.

Arvutame haarade pikkused valemiga  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ , kus  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ .

Saame  $|\overrightarrow{KL}| = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$  (üh),  $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}$  (üh). Seega  $KL \neq MN$  ja trapets ei ole võrdhaarne

Trapetsi kesklõiguks on haarade keskpunkte ühendav lõik. Seega kesklõigu otspunktid on

$$A\left(\frac{3+1}{2}; \frac{1+3}{2}; \frac{7+7}{2}\right) \Rightarrow A(2;2;7) \text{ ja } B\left(\frac{9+4}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{1+4}{2}\right) \Rightarrow B(6,5;0,5;2,5)$$

Arvutame haarade LK ja MN pikenduste vahelise nurga koosinuse. Nurk vektorite  $\overrightarrow{LK}$  ja  $\overrightarrow{LK}'$  vahel on sama, mis trapetsi haarade pikenduste vahel (kuna tegemist on kaasnurkadega paralleelsete sirgete  $LK'$  ja MN korral). Seega saame

$$\overrightarrow{LK}' = \overrightarrow{MN} = (-5; -1; 3),$$

$$\overrightarrow{LK} = (-2; -2; 0).$$

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{LK}'}{|\overrightarrow{LK}| \cdot |\overrightarrow{LK}'|},$$

$$\cos \varphi = \frac{(-5; -1; 3) \cdot (-2; -2; 0)}{\sqrt{4+4} \cdot \sqrt{35}} = \frac{10+2}{\sqrt{280}} = \frac{12}{2\sqrt{70}} = \frac{6}{\sqrt{70}} = \frac{6\sqrt{70}}{70} = \frac{3\sqrt{70}}{35}.$$

Vastus. Trapetsi alused on LK ja KN, trapets ei ole võrdhaarne. Kesklõigu otspunktide koordinaadid on A(2;2;7) ja B(6,5; 0,5; 2,5). Trapetsi haarade pikenduste vahelise nurga

$$\text{koosinus on } \cos \varphi = \frac{3\sqrt{70}}{35}.$$

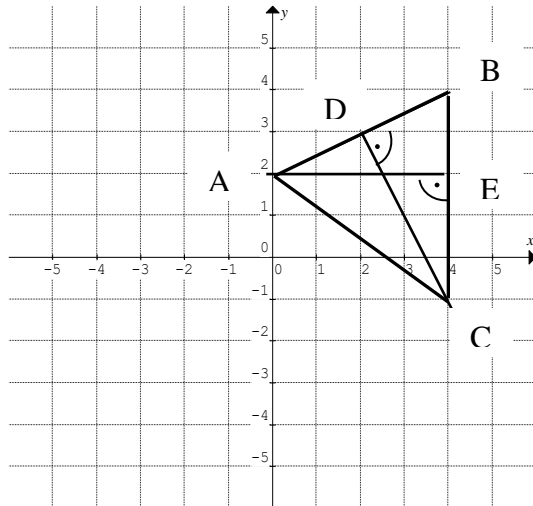
**10) Riigieksam 2002 (10p.) Kolmnurga tipud on A(0;2), B(4;4) ja C(4;-1).**

**1) Joonestage antud kolmnurk koordinaattasandile ja arvutage selle pindala.**

**2) Koostage sirge AB võrrand.**

**3) Kui suur on tõus sirgel, millel paikneb tipust C joonestatud kolmnurga kõrgus?**

*Lahendus.*



Võtame kolmnurga aluseks  $BC = 5$  üh ja kõrguseks  $AE = 4$  üh.  
Kolmnurga pindala arvutame valemiga

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ (üh}^2\text{)}.$$

Koostame sirge AB võrrandi. Antud on punktid  $A(0;2)$  ja  $B(4;4)$ . Koostame sirge võrrandi kahe punkti abil

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}; \quad \frac{x-0}{4} = \frac{y-2}{2} \Big| \cdot 4 \Rightarrow x = 2y - 4$$

Avaldame  $y$  ja saame sirge AB võrrandiks  
 $y = 0,5x + 2$ .

Kuna kolmnurga alus ja kõrgus on risti, siis  
 $AB \perp CD \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow 0,5 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -2$

Vastus. Kolmnurga pindala on 10 pindalaühikut ja AB võrrand on  $y = 0,5x + 2$ . Sirge tõus, millel paikneb tipust C joonestatud kõrgus on  $-2$ .

**11) Parabool  $y = ax^2 + bx + c$  läbib punkte  $(-2;0)$ ,  $(6;0)$  ja  $(0;-12)$ . Leia parabooli võrrand ja haripunkti koordinaadid.**

**Lahendus.** Kuna antud punktid on graafiku lõikepunktid koordinaattelgedega, siis teame, et parabool lõikab  $y$ -telge punktis  $(0;-12)$  ja seega on ruutfunktsiooni vabaliige  $c = -12$ .

Lõikepunktid  $x$ -teljega  $(-2;0)$  ja  $(6;0)$  annavad funktsiooni nullkohad  $x_1 = -2$  ja  $x_2 = 6$ .

Parabooli võrrandit võime otsida ka kujul  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$  kus  $x_1$  ja  $x_2$  on ruutfunktsiooni nullkohad. Asendame nullkohad parabooli võrrandisse punktis  $(0;-12)$

$$a(0 + 2)(0 - 6) = -12, \text{ millest leiame } a$$

$$-12a = -12 \text{ ja } a = 1.$$

Seega parabooli võrrand on  $y = 1 \cdot (x + 2)(x - 6)$  ehk  $y = x^2 - 4x - 12$ .

Haripunkti abstsissi leiame kas valemi järgi  $x_h = -\frac{b}{2a}$  või nullkohtade aritmeetilise

keskmisena  $x_h = \frac{-2 + 6}{2} = 2$  ja ordinaadi saame, kui asetame abstsissi väärtuse parabooli

võrrandisse  $y_h = 4 - 8 - 12 = -16$ . Haripunkt on  $H(2; -16)$ .

Vastus. Parabooli võrrand on  $y = x^2 - 4x - 12$  ja haripunkt on  $H(2; -16)$ .

**12) Kolmnurga tipud on A(-2;1;-3), B(-3;-1;-1) ja C(-5;5;-3). Leia tipu A juures olev sisenurk  $\alpha$  ja küljega AC paralleelse kesklõigu pikkus.**

**Lahendus.** Leiame nurga skalaarkorrutise abil kasutades valemit  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ .

Leiame tipust A vektorid  $\vec{AB} = (-3+2; -1-1; -1+3) = (-1; -2; 2)$  ja

$\vec{AC} = (-5+2; 5-1; -3+3) = (-3; 4; 0)$ . Leiame nende vektorite pikkused

$|\vec{AB}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$  üh ja  $|\vec{AC}| = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5$  (üh)

Leiame vektorite skalaarkorrutise  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 + 2 \cdot 0 = -5$  ja tipu A juures

oleva sisenurga  $\cos \alpha = \frac{-5}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{3} \approx 109^\circ 28'$ . Kolmnurga kesklõik võrdub

poolega temaga paralleelsest küljest, seega kesklõik on  $0,5AC = 2,5$  (üh).

Vastus. Tipu A juures olev sisenurk on  $\alpha \approx 109^\circ 28'$  ja küljega AC paralleelne kesklõik on pikkusega 2,5 ühikut.

**13) Rööpküliliku ABCD kolm tippu on A(-4;1;2), B(-2;-1;1) ja C(-1;1;-2). Leia neljas tipp ja nurk pikema diagonaali ning lühema külje vahel.**

**Lahendus.**

Leiame rööpküliliku neljanda tippu D(x;y;z).

$\vec{AD} = (x+4; y-1; z-2)$ .

Kuna  $\vec{AD} = \vec{BC}$ , siis saame

$$\begin{cases} x+4=1 \\ y-1=2 \\ z-2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow D(-3;3;-1)$$

Leiame külgede AB ja BC pikkused

$\vec{AB} = (2; -2; -1)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4+4+1} = 3$  (üh)

$\vec{BC} = (1; 2; -3)$

$|\vec{BC}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$  (üh)

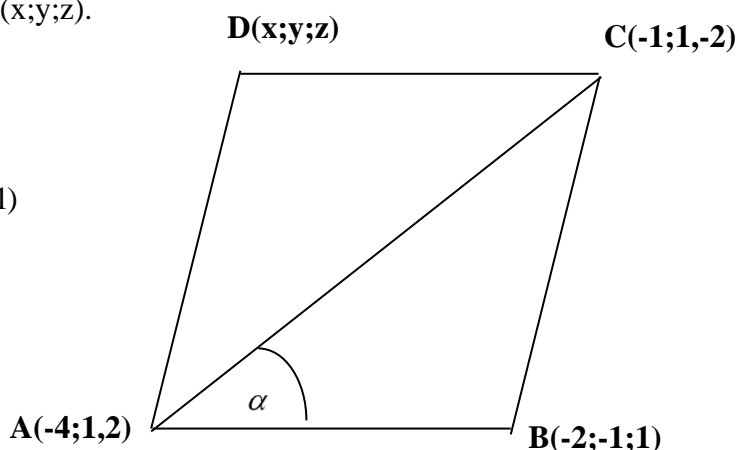
Leiame diagonaalide pikkused

$\vec{BD} = (-1; 4; -2)$

$|\vec{BD}| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$  (üh)

$\vec{AC} = (3; 0; -4)$

$|\vec{AC}| = \sqrt{9+0+16} = 5$  (üh)



Seega AC on pikem diagonaal ja AB on lühem külg. Leiame nende vahele jääva nurga

$$\text{valemist } \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot (-4)}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 48^{\circ}11'$$

Vastus. Tipu D koordinaadid on D(-3; 3; -1) ja  $\alpha = 48^{\circ}11'$ .

**14) Riigieksam 1997(10p.) Antud on tasandi neli punkti A(-6;-1), B(-4;-4), C(-1;-6) ja D(-3;-3). Tõestage, et nelinurk ABCD on romb ja arvutage selle pindala.**

**Lahendus.** Nelinurk on romb, kui tema diagonaalid on risti ja küljed on võrdsed.

Leiame rombi diagonaalideks olevad vektorid  $\overrightarrow{AC} = (5;-5)$  ja  $\overrightarrow{BD} = (1;1)$ .

Kontrollime vektorite ristseisu sklaarkorrutise abil  $5 \cdot 1 + (-5) \cdot 1 = 0$ , st. diagonaalid on teineteisega risti.

Teiseks leiame külgede pikkused.

$$AB = \sqrt{(-4+6)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}(\text{üh})$$

$$BC = \sqrt{(-1+4)^2 + (-6+4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}(\text{üh})$$

$$CD = \sqrt{(-3+1)^2 + (-3+6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}(\text{üh})$$

$$AD = \sqrt{(-3+6)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}(\text{üh})$$

Leiame nüüd rombi pindala diagonaalide kaudu

$$S = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{25+25} \cdot \sqrt{1+1}}{2} = \frac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5 \text{ üh}^2$$

Vastus. Nelinurk on romb pindalaga  $5 \text{ üh}^2$ .

**15) Riigieksam 2000 (10p.) Täisnurkse kolmnurga kaks tippu on punktides A(1;-2;1) ja B(-4;-4;1). Täisnurga tipp C asetseb y- teljel. Leida punkti C koordinaadid.**

**Lahendus.** Kuna tipp C asub y- teljel, siis saame tema koordinaadid tähistada  $C(0; y; 0)$ .

Leiame selle tipu koordinaadid kasutades Pythagorase teoreemi. Vastavalt ülesande tekstile on kaatetiteks küljed AC ja BC ning hüpotenuusiks AB.

Seega  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ .

Leiame

$$\overrightarrow{AB} = (-5, -2; 0)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 4 + 0} = \sqrt{29} \text{ (üh)}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1; y + 2; -1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + (y + 2)^2 + 1} = \sqrt{y^2 + 4y + 6} \text{ (üh)}$$

$$\overrightarrow{BC} = (4; y + 4; -1)$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + (y + 4)^2 + 1} = \sqrt{y^2 + 8y + 33} \text{ (üh)}$$

Asendame saadud tulemused Pythagorase teoreemi

$$29 = y^2 + 4y + 6 + y^2 + 8y + 33$$

$$2y^2 + 12y + 10 = 0 \quad | : 2$$

$$y^2 + 6y + 5 = 0$$

Lahendades ruutvõrrandi Viete'i teoreemi abil saame lahenditeks  $y_1 = -5$  ja  $y_2 = -1$ .

Oleme saanud kaks võimalikku tipu C asukohta  $(0; -5; 0)$  või  $(0; -1; 0)$ .

Vastus. Täisnurga tipp asub punktis  $C_1 (0; -5; 0)$  või  $C_2 (0; -1; 0)$ .

## HARJUTUSÜLESANDED

- 1) Koosta võrrand sirgele, mis läbib punkti  $B(8;0)$  ja on paralleelne sirgega  $y = -x$ . Millises punktis läbib see sirget  $y = 0$ ? **V:**  $y = -x + 8, (8;0)$
- 2) On antud punkt  $A(2;-1)$  ja sirge  $a: 4x - 7y + 12 = 0$ . Koosta võrrand sirgetele  $b$  ja  $c$ , mis läbivad punkti  $A$ , kusjuures sirge  $b$  on paralleelne ja sirge  $c$  risti sirgega  $a$ . Tee joonis. **V:**  $4x - 7y - 15 = 0$  ja  $7x + 4y - 10 = 0$ .
- 3) *Riigieksam 1998.* Heinakuhja telglõige on piiratud joonega  $y = 1 - x^2$  ja sirgega  $y = 0$ . Kuhjale toetub koonusekujuline katus, mille telglõike tipunurk on täisnurk. Leia kuhja tipp ning katuse tipp vaheline kaugus. **V:**  $0,25$  üh
- 4) *Riigieksam 1998.* Paja telglõige on piiratud joontega  $y = x^2$  ja  $y = 1$ . Pada asetseb koonuses, mille tipp on allpool, telg on vertikaalne ja telglõike tipunurk on täisnurk. Leia paja kaugus koonuse tippust. **V:**  $0,25$  üh
- 5) *Riigieksam 1999.* Antud on sired  $x + 7y - 6 = 0$  ja  $5x - 5y + 1 = 0$ .
  - a) Leia nende sirgete lõikepunkt
  - b) Leia nende sirgete vahelise nürinurga poolitaja võrrand**V:**  $\left(\frac{23}{40}; \frac{31}{40}\right)$  ja  $y = -3x + 2,5$
- 6) Joone  $y = -x^2 - 2x + 8$  graafiku teises veerandis asuval osal on antud punktid  $A_1(x_1; y_1)$  abstsissiga  $x_1 = -1$  ja  $A_2(x_2; y_2)$  ordinaadiga  $y_2 = 5$ . Leia
  - a) punktide  $A_1$  ja  $A_2$  koordinaadid
  - b) vektorite  $OA_1$  ja  $OA_2$  skalaarkorrutis;
  - c) vektorite  $OA_1$  ja  $OA_2$  vahelise nurga suurus täpsusega  $1'$ .**V:**  $A_1(-1; 9), A_2(-3; 5); 48; 24^\circ 37'$
- 7) *Riigieksam 2000* Täisnurkse kolmnurga kaks tippu on punktides  $A(1; -2; 1)$  ja  $B(-4; -4; 1)$ . Täisnurga tipp  $C$  asetseb  $y$ -teljel. Leia punkti  $C$  koordinaadid. **V:**  $(0; -5; 0)$  või  $(0; -1; 0)$
- 8) *Riigieksam 2003 (15 p.)* Tasandil on antud 4 sirget. Esimene neist on antud võrrandiga  $y = 0,5x + 3$ . Teine on paralleelne esimesega ja läbib punkti  $P(2; -1)$ . Kolmas on risti esimesega ja läbib punkti  $Q(-3; -1)$ . Neljas on paralleelne  $y$ -teljega ja läbib punkti  $R(6; 3)$ . Kolmas sirge lõikab esimest sirget punktis  $A$  ja teist punktis  $B$ . Neljas sirge lõikab esimest sirget punktis  $D$  ja teist punktis  $C$ .
  - a) Tehke joonis ja koostage antud sirgete võrrandid.
  - b) Leidke nelinurga  $ABCD$  tippude koordinaadid.
  - c) Arvutage nelinurga  $ABCD$ 
    1. külgede täpsed pikkused,
    2. pindala.

V:

$$y = 0,5x - 2; y = -2x - 7; x = 6; A(-4;1), B(-2;-3), C(6;1), D(6;6); 2\sqrt{5} \text{ ü}, 4\sqrt{5} \text{ ü}, 5\sqrt{5} \text{ ü}, 5 \text{ ü}; S = 45 \text{ ü}^2$$

10) Riigieksam 2004 (15 p.) Antud on sirged  $y = x$ ,  $y = -4x$  ja  $y = -x + 6$ .

- Arvutage nende sirgete lõikepunktide koordinaadid.
- Joonestage antud sirged ühes ja samas teljestikus.
- Leidke antud sirgete lõikepunkte läbiva parabooli  $y = ax^2 + bx + c$  võrrand.
- Arvutage eelmises punktis saadud parabooli haripunkti koordinaadid.

V:  $A(0;0), B(3;3), C(-2;8), y = x^2 - 2x, H(1;-1)$

11) Riigieksam 2005 (15 p.) Kolmnurk  $ABC$  on määratud tipuga  $A(2;1)$  ja vektoritega  $\overrightarrow{AB} = (2;3)$  ning  $\overrightarrow{BC} = (-5;0)$ .

- Arvutage tippude  $B$  ja  $C$  koordinaadid ning joonestage kolmnurk  $ABC$ .
- Arvutage külje  $AC$  pikkus.
- Koostage punkte  $A$  ja  $C$  läbiva sirge võrrand ning leidke selle sirge ja  $x$ -telje lõikepunkti koordinaadid.
- Koostage kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone võrrand.

V:  $B(4;4), C(-1;4), 3\sqrt{2} \text{ ü}, y = -x + 3, (3;0); (x-1,5)^2 + (y-3,5)^2 = 6,5$

12) Riigieksam 2006 (15 p.) Võrdhaarse kolmnurga haarad asetsevad sirgetel  $2x + 3y - 12 = 0$  ja  $3x + 2y - 12 = 0$ . Aluse keskpunkt on  $K(-0,6; 5,4)$ . Tehke joonis ja leidke

- kolmnurga haarade lõikepunkti koordinaadid;
- võrrand sirgele, millel asetseb kolmnurga alus;
- kolmnurga kõrguse täpne pikkus.

V:  $L(2,4;2,4), y = x + 6; 3\sqrt{2} \text{ ü}$

13) Riigieksam 2007 (15 p.) Võrdhaarse trapetsi  $ABCD$  alused on paralleelsed  $y$ -teljega ja  $x$ -telg on trapetsi sümmeetriateljeks. Antud on tipp  $A(1,5; -5,5)$  ning vektor  $\overrightarrow{AD} = (3,2;2,4)$ . Tehke joonis ja leidke

- trapetsi pindala;
- trapetsi alusnurk;
- selle sirge võrrand sirgele, millel paikneb haar  $AD$ ;
- haarade pikenduste lõikepunkt.

V:  $27,52 \text{ ü}_2; \alpha = \arctan \frac{4}{3} \approx 53^\circ 8'; 3x - 4y - 26,5 = 0; L\left(8\frac{5}{6}; 0\right)$

14) Riigieksam 2008 (10 p.) Punktist  $A(-2; 2)$  on joonestatud vektor  $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$ . Läbi punkti  $D(-3; -5)$  on joonestatud sirge  $DC$ , mis on paralleelne sirgega  $AB$ . Punktide  $A, B, C$  ja  $D$  järjestikuse ühendamisega saadakse täisnurkne trapets, mille täisnurk on tipu  $B$  juures.

- Tehke joonis.
- Kirjutage sirgete  $DC$  ja  $BC$  võrrandid
- Arvutage punkti  $C$  koordinaadid.
- Arvutage trapetsi kõrgus.

V:  $y = \frac{1}{3}x - 4; y = -3x + 16; C(6;-2); h = 2\sqrt{10} \text{ ü}$

15) Riigieksam 2009 (15 p.) Ristküliku  $ABCD$  üheks tipuks on punkt  $A(4; 3)$ , tipp  $B$  asub  $x$ -teljel ja küljega  $AB$  paralleelne külge  $CD$  asub sirgel  $x - y + 7 = 0$ .

- Arvutage ristküliku  $ABCD$  tippude  $B, C$  ja  $D$  koordinaadid ning joonestage ristkülik  $ABCD$  koordinaattasandile.
- Koostage sirge võrrand, millel asub ristküliku diagonaal  $AC$ .

c) Arvutage ristküliku  $ABCD$  ümbermõõdu täpne väärtus

d) Koostage ristküliku  $ABCD$  ümberringjoone võrrand.

V:  $B(1;0), C(-3;4), D(0;7); x + 7y - 25 = 0; 14\sqrt{2}$  ü,  $(x - 0,5)^2 + (y - 3,5)^2 = 12,5$

16) Riigieksam 2010 (15 p.) Funktsiooni  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  graafik lõikab  $y$ -telge punktis  $A$  ja  $x$ -telge punktides  $D(x_1;0)$  ning  $C(x_2;0)$ , kus  $x_1 < x_2$ . Sirge  $s$  läbib punkte  $A$  ja  $D$  ning sirge  $t$  läbib punkte  $A$  ja  $C$ . Sirge  $u$  on paralleelne sirgega  $y = x$ . Sirged  $s$  ja  $u$  lõikuvad punktis  $B$  ning sirged  $t$  ja  $u$  lõikuvad punktis  $C$ .

a) Koosta sirgete  $s$ ,  $t$ , ja  $u$  võrrandid ning arvuta punkti  $B$  koordinaadid;

b) Joonista funktsiooni  $f(x)$  graafik ja sirged  $s$ ,  $t$  ja  $u$ ;

c) Näita, et  $\triangle ABC$  on täisnurkne ja arvuta  $\angle BAC$ .

V:  $y = -3x + 3, y = -x + 3, y = x - 3; B(1,5; -1,5); \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 26^\circ 34'$

17) Riigieksam 2011 (15 p.) Joonte  $f(x) = \sqrt{x+5}$  ja  $g(x) = x + 3$  lõikepunkt  $A$  on rombi

$ABCD$  tipp. Diagonaali vektor on  $\vec{AC} = (4; -4)$ . Tipp  $B$  asub  $y$ -teljel.

a) Arvuta rombi tippude koordinaadid ja koosta sirge võrrand, millel asub diagonaal  $BD$ .

b) Arvuta rombi pindala.

c) Joonesta funktsioonide  $f(x)$  ja  $g(x)$  graafikud ja romb  $ABCD$ .

V:  $A(-1;2), B(0;-1), C(3;-2), D(2;1); 8\sqrt{2}h^2$

18) Riigieksam 2012 (15 p.) Sirge  $s$  on määratud punktiga  $A(0;0)$  ja sihivektoriga  $\vec{s} = (-1;2)$ . Sirge  $t$  läbib punkti  $B(4;2)$  ja on risti sirgega  $s$ .

a) Koosta sirgete  $s$  ja  $t$  võrrandid.

b) Märki koordinaatteljestikku punktid  $A$  ja  $B$  ning joonesta sirged  $s$  ja  $t$ .

c) Sirgel  $s$  asub punkt  $C$  nii, et kolmnurga  $ABC$  pindala on 15. Leia arvutamise teel punkti  $C$  koordinaadid, kui punkt  $C$  asub koordinaatteljestiku IV veerandis.

d) Koosta ringjoone, mille diameeter on  $AB$ , võrrand.

V:  $s: y = -2x; t: y = 0,5x; C(3;-6); (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

19) Riigieksam 2013 (15 p.) Sirge  $t$  läbib punkti  $A(2;-7)$  ja on paralleelne sirgega  $s: x - 2y = 6$ . Sirge  $u$  läbib punkti  $A$ , on paralleelne  $x$ -teljega ja lõikub sirgega  $s$  punktis  $D$ . Sirge  $f$  läbib punkti  $K(7;-7)$ , on risti sirgega  $s$  ning lõikub sirgetega  $t$  ja  $s$  vastavalt punktides  $B$  ja  $C$ .

a) Leidke sirgete  $t$ ,  $u$  ja  $f$  võrrandid.

b) Märkige koordinaatteljestikku kõik ülesande tekstis nimetatud punktid ja sirged.

c) Arvutage tekkinud nelinurga  $ABCD$  tippude  $C$  ja  $D$  koordinaadid.

d) Leidke ringjoone võrrand, mille keskpunkt asub lõigu  $CD$  keskpunktis ja millele sirge  $t$  on puutujaks. V:

$y = 0,5x - 8; y = -7; y = -2x + 7; D(-8;-7), C(4;-1); (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$

---

20) Riigieksam 2014 (5 p.) Ruumis on antud vektorid  $\vec{a} = (-1; 5; 4)$  ja  $\vec{b} = (3; -5; -2)$ . Arvutage vektori  $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$  koordinaadid ning nurk vektorite  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  vahel. V:  $154^\circ 18'$

**21) Riigieksam 2015 (5 p.)** Joonestage koordinaatteljestikku sirged  $y = \frac{1}{2}x + 2$  ja  $x = 6$ .

Viirutage kujund, mis on piiratud antud sirgete ja mõlema koordinaatteljega. Arvutage viirutatud kujundi pindala.  $V: 21 \text{ ü}^2$

**22) Riigieksam 2014 (10p.)**

Sirge  $s: y = \frac{1}{2}x - 1$  lõikab  $x$ -telge punktis  $A$ . Sirge  $t$  läbib punkti  $A$ , on sirgega  $s$  risti ja lõikab  $y$ -telge punktis  $B$ . Sirge  $u$  läbib punkti  $B$ , on  $y$ -teljega risti ning lõikab sirget  $s$  punktis  $C$ .

1. Arvutage punktide  $A$ ,  $B$  ja  $C$  koordinaadid ning koostage sirgete  $t$  ja  $u$  võrrandid.
2. Koostage kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone võrrand.

$$V: A(2;0), B(0;4), C(10;4); y = -2x + 4; y = 4; (x-5)^2 + (y-4)^2 = 25$$

**23) Riigieksam 2015 (10p.)**  $V: 35^\circ 32'$ ;  $y = x^2 - 4x - 9$

On antud punktid  $A(-2; 3)$  ja  $B(5; -4)$ . Sirge  $BC$  on risti sirgega  $AB$  ja punkt  $C$  asub  $y$ -teljel.

1. Arvutage nurk  $BAC$ .
2. Koostage kolmnurga  $ABC$  tippelava parabooli võrrand.

**24) Riigieksam 2015 (10p)**  $V: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 10; C = 2\sqrt{10}\pi \text{ ü}; y = -3x + 8$

On antud punktid  $A(-1; 1)$  ja  $B(5; 3)$ .

1. Ringjoone diameeter on lõik  $AB$ . Koostage ringjoone võrrand.
2. Arvutage selle ringjoone pikkus.
3. Koostage lõigu  $AB$  keskristsirge võrrand.

**25) Riigieksam 2015 (10p)**

Kolmnurga  $ABC$  tippude koordinaadid on  $A(-4; 2)$ ,  $B(2; -4)$  ja  $C(8; 4)$ .

1. Joonestage kolmnurk  $ABC$  koordinaattasandile.
2. Koostage sirge  $AB$  võrrand.
3. Koostage sirge võrrand, kui sirge läbib kolmnurga külje  $AC$  keskpunkti  $M$  ning on paralleelne kolmnurga küljega  $AB$ . Joonestage see sirge.

$$V: y = -x - 2; y = -x + 5$$

**26) Riigieksam 2016 (10p)**

Võrdhaarse kolmnurga  $ABC$  üks tipp on punktis  $A(4; -3)$ , teine tipp  $C$  asub sirgel  $y = 7$  ja kolmnurga aluse  $AB$  määrab vektor  $\overline{AB} = (4; 8)$ .

1. Arvutage punkti  $B$  koordinaadid.
2. Koostage sirge  $AB$  võrrand.
3. Ringjoone diameeter on kolmnurga  $ABC$  alus  $AB$ . Koostage selle ringjoone võrrand.
4. Arvutage punkti  $C$  koordinaadid.  $V: B(8;5), y=2x-11, (x-6)^2+(y-1)^2=20, C(-6;7)$



**27) Riigieksam 2017K (10p)**

Sirge  $s$ , mille võrrand on  $y = 2x - 4$ , lõikab  $x$ -telge punktis  $A$ . Sirge  $t$  on paralleelne sirgega  $s$  ja läbib koordinaatide alguspunkti  $O(0; 0)$ .

1. Leidke punkti  $A$  koordinaadid ja koostage sirge  $t$  võrrand.
2. Märkige koordinaatteljestikku punktid  $A$  ja  $O$  ning joonestage sirged  $s$  ja  $t$ .
3. Rööpküliku  $OABC$  kõik tipud asetsevad sirgetel  $s$  ja  $t$  ning  $\overrightarrow{AC} = (1; 6)$ . Arvutage rööpküliku tippude  $B$  ja  $C$  koordinaadid ning joonestage rööpkülük  $OABC$  koordinaatteljestikku.
4. Arvutage rööpküliku  $OABC$  pindala.  $V: A(2; 0); t: y = 2x; B(5; 6), C(3; 6); S = 12\text{ü}^2$

**28) Riigieksam 2017L (10p)** Rombi  $ABCD$  diagonaal  $AC$  asub sirgel  $y = 2x - 6$ . Rombi tipp  $A$  asub  $y$ -teljel ja  $\overrightarrow{AB} = (7; 4)$ .

1. Koostage sirge võrrand, millel asub rombi teine diagonaal  $BD$ .
2. Arvutage rombi  $ABCD$  kõrgus ja pindala.  $V: BD: y = -0,5x + 1,5; h = \frac{60}{\sqrt{65}}; S = 60\text{ü}^2$

**29) Riigieksam 2018L (10p)** Kera diameetri otspunktid on  $A(-1; 3; 4)$  ja  $B(3; -4; 0)$ .

1. Arvuta kera keskpunkti  $O$  koordinaadid ja kera ruumala.
2. Punkt  $C(4, 1; -1)$  asub kera pinnal. Arvuta nurk  $ACB$ .  $V: 121,5\pi(\text{ü}^3); 90^\circ$ .

**30) Riigieksam 2018L (10p)** Punktid  $A(-5; -4)$  ja  $B(3; 2)$  on täisnurkse kolmnurga  $ABC$  hüpotenuusi tipud. Kaatet  $AC$  asub sirgel  $y = 2x + 6$ .

1. Koosta sirge  $BC$  võrrand ja arvuta punkti  $C$  koordinaadid.
2. Joonesta kolmnurk  $ABC$  koordinaatteljestikku.
3.  $x$ -telg jaotab kolmnurga  $ABC$  kaheks osaks. Leia  $x$ -teljest allapoole jääva osa pindala.  
 $V: y = -0,5x + 3,5; C(-1; 4); S = 6\frac{2}{3}(\text{ü}^2)$

**31) Riigieksam 2018K (10p)** On antud punkt  $A(5; 1)$  ning vektorid  $\overrightarrow{AB} = (-2; 4)$  ja  $\overrightarrow{CA} = (4; 1)$ .

1. Märki koordinaatteljestikku punkt  $A$ , joonesta vektorid  $\overrightarrow{AB}$  ja  $\overrightarrow{CA}$  ning leia punktide  $B$  ja  $C$  koordinaadid.
2. Arvuta lõigu  $BC$  pikkus.
3. Koosta sirge  $BC$  võrrand.
4. Joonesta koordinaatteljestikku sirge, mis läbib punkti  $A$  ja on paralleelne  $x$ -teljega ning lõikab sirget  $BC$  punktis  $L$ . Arvuta punkti  $L$  koordinaadid.  $V: B(3; 5), C(1; 0); BC = \sqrt{29}(\text{ü}^2); y = 2,5x - 2,5; L(1, 4; 1)$

**32) Riigieksam 2019L (10p)** Punktid  $A(3; 0)$  ja  $B(7; 4)$  on rööpküliku  $ABCD$  tipud ja selle rööpküliku diagonaali  $AC$  kirjeldab vektor  $\overrightarrow{AC} = (2; 8)$ .

1. Arvutage rööpküliku tippude  $C$  ja  $D$  koordinaadid ning tehke joonis.
2. Rööpkülükust  $ABCD$  lõigatakse välja võimalikult suur ring. Arvutage selle ringi täpne raadius.  $V: C(5; 8), D(1; 4); \sqrt{4,5} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{ü}$

**33) Riigieksam 2019K (10p)**

On antud punktid  $A(-1; 3)$ ,  $B(3; 1)$  ja  $C(0; -3)$ .

1. Leidke vektori  $\overrightarrow{BC}$  pikkus.

2. Nelinurk  $ABCD$  on rööpkülik. Arvutage punkti  $D$  koordinaadid ja joonestage rööpkülik  $ABCD$  koordinaatteljestikku.

3. Arvutage rööpküliku  $ABCD$  pindala.  $V$ : 5 ü;  $D(-4;-1)$ ;  $22 \text{ ü}^2$

**34) Riigieksam 2020L (10p)** Täisnurkse kolmnurga tipp  $C(5; 4)$  asub ringjoonel, mille keskpunkt on  $A(1; 1)$ . Selle kolmnurga ühe teravnurga tipp asub ringjoone keskpunktis  $A$  ja teise teravnurga tipp  $B$  asub  $x$ -teljel.

1. Arvutage punkti  $B$  koordinaadid ja joonestage kolmnurk  $ABC$ .

2. Viirutage antud ringjoonega piiratud ringi ja kolmnurga  $ABC$  ühisosa ning arvutage selle ühisosa täpne pindala.  $V$ :  $B(8;0)$ ;  $\frac{25\pi}{8} \text{ ü}^2$

**35) Riigieksam 2020K (10p)** Trapetsi  $ABCD$  lühema haara  $CD$  otspunktid on  $C(1; 9)$  ja

$D(5; 1)$ . Haara  $AB$  keskpunkt on punkt  $M(-5; 1)$  ja haaral  $AB$  asub vektor  $\overrightarrow{MA} = (6; -2)$ .

1. Arvutage punktide  $A$  ja  $B$  koordinaadid.

2. Joonestage koordinaattasandile trapets  $ABCD$  ja näidake arvutuste abil, et see trapets on täisnurkne.

3. Arvutage trapetsi  $ABCD$  pindala.  $V$ :  $A(1;-1)$ ,  $B(-11;3)$ ;  $80 \text{ ü}^2$

**36) Riigieksam 2021L (10p)** Ringjoon  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$  läbib punkti  $O(0;0)$  ning lõikab lisaks veel  $x$ -telge punktis  $A$  ja  $y$ -telge punktis  $B$ .

1. Arvutage punktide  $A$  ja  $B$  koordinaadid.

2. Põhjendage, et lõik  $AB$  on selle ringjoone diameter.

3. Koostage ringjooneoe punktis  $B$  joonestatud puutuja võrrand.

4. Joonestage koordinaattasandile ringjoon ja selle puutuja punktis  $B$ .  $V$ :  $A(8;0)$ ,  $B(0,6)$ ;

$$y = \frac{4}{3}x + 6$$

**37) Riigieksam 2022L (10p)** Ringjoon keskpunktiga  $O(5; 3)$  läbib vektori  $\overrightarrow{OA} = (-3; 4)$  lõpp-punkti  $A$ .

1. Leidke ringjoone diameetri  $AB$  otspunkti  $B$  koordinaadid.

2. Koostage selle ringjoone võrrand.

3. Arvutage ringjoone selle kaare pikkus, mis asub  $x$ -teljest allpool.

$V$ :  $B(8;-1)$ ; Ringjoone võrrand on  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$ ; Kaare pikkus on  $9,3 \text{ ü}$ .

**38) Riigieksam 2022K (10p)** On antud punkt  $A(2;1)$  ning vektorid  $\overrightarrow{AB} = (4;3)$  ja  $\overrightarrow{CA} = (-5;1)$ .

1. Joonestage antud koordinaatteljestikku kolmnurk  $ABC$ .

2. Koostage sirge  $BC$  võrrand.

3. Koostage võrrand sirgele  $s$ , mis läbib punkti  $A$  ja on risti sirgega  $BC$ .

4. Põhjendage arvutustega, kas sirge  $s$  läbib kolmnurga  $ABC$  külje  $BC$  keskpunkti.

$V$ : Sirge  $BC$  võrrand on  $y = -4x + 28$ ; Sirge  $s$  võrrand on  $y = 0,25x + 0,5$ ; Sirge  $s$  ei läbi külje  $BC$  keskpunkti.