KORDAMINE RIIGIEKSAMIKS IX
TÕENÄOSUSTEOORIA JA KIRJELDAV STATISTIKA

Kombinatoorika

16) $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot....\cdot 2\cdot 1$

$0! = 1$

17) **Permutatsioonideks** nimetatakse n elemendilise hulga elementidest n elemendilisi järjestatud osahulki ning permutatsioonide arvu leitakse valemi järgi

$P_n = n!$

Näide. Leidke, mitu erinevat võimalust on tuntud lauses "Tihti taevas tähti nähti" sõnade ümberpaigutamiseks.

Lahendus. Kuna lauses on 4 sõna, siis saame sõna ümber paigutades 4! = 4 · 3 · 2 · 1 = 24 lauset.

3) **Kombinatsioonideks** n elemendist k kaupa nimetatakse n elemendilise hulga k elemendilisi osahulki ning kombinatsioonide arvu leitakse valemi järgi $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Näide. Leidke, kui palju on võimalusi kolme pliiatsi võtmiseks värvipliiatsi karbist, kus on 12 erinevat värvi.

Lahendus. Leiame kui palju erinevaid kombinatsioone saab moodustada 12-st kolme kaupa

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot ....2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 9\cdot 8\cdot ....2\cdot 1} = 220.$$

Seega on kolme erineva värvipliiatsi võtmiseks 220 võimalust.

30) **Variatsioonideks** n elemendist k kaupa nimetatakse n elemendilise hulga k elemendilisi järjestatud osahulki ning variatsioonide arvu leitakse valemi järgi

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Näide. Leidke, kui palju on võimalusi 9 õppeainest 6 tunnise tunniplaani koostamiseks.

Lahendus. Leiame kui palju on serinevaid võimalusi 6 õppeaine valimiseks 9-st, kus tundide järjekord on oluline. Selleks kasutame variatsioonide valemit

$$A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9\cdot 8\cdot ...\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 60480.$$

Saime, et 9 õppeainest saame moodustada tervelt 60480 erinevat 6 – tunnist tunniplaani (kusjuures paaristunde siin ei ole!).

Tõenäosuse mõiste, omadused ja põhivalemid.

1) **Sündmuse A klassikaliseks tõenäosuseks p(A)** nimetatakse sündmusele A soodsate sündmuste võimaluste arvu m ja kõikide sündmuste arvu n suhet

$$p(A) = \frac{m}{n},\ 0 \le p(A) \le 1.$$

Näide. Kui suur on tõenäosus paarituarv silmade saamiseks täringuviskel.

Lahendus. Täringul on 6 tahku, st. kõikide võimaluste arv on n = 6. Meid huvitavaid paarituid silmi on kolm: 1, 3 ja 5, st. soodsate võimaluste arv on m = 3. Saame tõenäosuseks $\frac{3}{6} = 0{,}5$

2) Sündmuse A **vastandsündmuseks** $\overline{A}$ nimetatakse sündmust, mis seisneb sündmuse A mittetoimumises. Näiteks täringu viskamisel on sündmuse "tuleb 2 silma" vastandsündmuseks "ei tule 2 silma".

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

3) Kahe sündmuse A ja B summaks (ühendiks) nimetatakse sündmuse A või sündmuse B toimumist. Kui sündmused on teineteist välistavad, siis $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Näide. Urnis on 5 musta, 3 punast ja 2 valget kuuli. Kui suur on tõenäosus urnist musta või valge kuuli võtmiseks?

Lahendus. Kõikide kuulide arv on 10, st. kõikide võimaluste arv on n = 10. Olgu musta kuuli võtmise sündmus M ja kuulide arv (soodsad võimalused) m = 5. Seega on tõenäosus saada must kuul $p(M) = \frac{5}{10} = 0{,}5$. Olgu valge kuuli võtmise sündmus V ja kuulide arv (soodsad võimalused) m = 2. Seega on tõenäosus saada valge kuul $p(V) = \frac{2}{10} = 0{,}2$.

Musta või valge kuuli saamise tõenäosus on $p(M \cup V) = p(M) + p(V) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$.

4) Kahe sündmuse A ja B korrutiseks (ühisosa) nimetatakse sündmust, mille toimumine seisneb nii sündmuse A kui ka B toimumises. Kui sündmused on teineteisest sõltumatud, siis $A \cap B = p(A) \cdot p(B)$.

Näide. Leidke, milline o n tõenäosus 36 kaardiga pakist ristipildi võtmiseks.

Lahendus. Kõikide võimaluste arv n = 36. Kaart, mille tõenäosust leiame, peab olema nii risti kui ka pilt. Tähistame risti masti saamise sündmuse R ja kuna ristisid on pakis 9, siis on $p(R) = \frac{9}{36}$. Pildi saamise sündmuse tähistame P ja kuna pilte on pakis 16, siis selle saamise tõenäosus on $p(P) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

Ristipildi saamise tõenäosus on $p(R \cap P) = \frac{9}{36} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$.

5) Kui sündmused on teineteist mittevälistavad, siis summa tõenäosus on $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

6) Kahe teineteisest sõltuva sündmuse koostoimumise tõenäosus on $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B / A))$, st. teine sündmus toimub tingimusel, et esimene toimus.

7) Bernoulli valem: Kui sündmuse A tõenäosus igal katsel on p, siis tõenäosus, et n katse korral sündmus A toimuks k korda, leitakse valemiga $P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}$, kus k on sündmuse toimumiste arv, p on sündmuse toimumise tõenäosus ja q vastandsündmuse toimumise tõenäosus, st. q = 1 – p.

Näide. Leidke, kui suur on tõenäosus, et täringu viskamisel 5 korda tuleb kolmega jaguvate silmade arv kahel korral? *Lahendus.* Olgu kolmega jaguva silmade arvu saamine sündmus K. Kõigi katsete arv on n = 6, soodsate katsete arv k = 2, kolmega jaguvate silmade arvu saamise tõenäosus $p(K) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ning vastandsündmuse toimumise tõenäosus on q = p($\overline{K}$) = $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Bernoulli valemi järgi on küsitud tõenäosus siis

$$P_{5,2} = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{27} \approx 0{,}329\,.$$

NÄITEÜLESANDED.

1) *Riigieksam 1998 (15 punkti*). **Müügil on 8 helikassetti soovitud muusikaga. On teada, et 25% neist on defektidega. Maire ostis 3 kassetti.**

a) Kui tõenäone on, et täpselt üks neist on defektiga?

b) Leidke tõenäosus, et ostetud kassettide hulgas on defektidega kassette rohkem, kui defektita?

c) Milline on tõenäosus, et kõik kolm kassetti on defektita?

Lahendus. Leiame esmalt defektidega kassettide arvu 0,25 · 8 = 2. Seega 8 kasseti hulgas on 6 defektita ja 2 defektiga kassetti.

a) Tõenäosuse leidmisel kasutame valemit $p(A) = \frac{m}{n}$, kus m on soodsate sündmuste võimaluste arv ja n kõikide sündmuste arv.

Leiame, kui tõenäone on, et ostetud kolme kasseti hulgas oli 1 defektiga. Tähistame selle sündmuse A. Kõikide võimaluste arvu leiame kombinatsioonide abil $n = C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$ (st. kombinatsioonide arv kaheksast kolme kaupa). Soodsate võimaluste arv on, et ostetud kolmest kassetist on 1 defektiga (C_2^1) ja 2 tervet (C_6^2), st. $m = C_2^1 \cdot C_6^2 = \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 30.$ Kasutasime korrutamisreeglit, kuna oli 2 tervet ***ja*** 1 defektiga. Leiame tõenäosuse $p(A) = \frac{30}{56} \approx 0{,}536.$

b) Järgmisena leiame tõenäosuse, et ostetud kassettide hulgas on defektidega kassette rohkem, kui defektita. Tähistame selle sündmuse B. Soodaste võimaluste arv on 2 defektiga kassetti ($C_2^2 = 1$) ja 1 terve kassett ($C_6^1 = 6$). Kõikide võimaluste arv on sama, mis eelmises punktis. Saame tõenäosuseks korrutamisreegliga

$p(B) = \frac{1 \cdot 6}{56} \approx 0{,}107.$

c) Sündmuse, et kõik kolm kassetti on defektita tähistame C. Soodsate võimaluste arv on $m = C_6^3 = 20$ ja kuna kõikide võimaluste arv on ikka sama, siis

$p(C) = \frac{20}{56} \approx 0{,}357.$

Vastus. Tõenäosus, et täpselt 1 on defektiga, on 0,536. Tõenäosus, et ostetute hulgas oli defektiga kassette rohkem on 0,107. Tõenäosus, et kõik kolm on defektita on 0,357.

2) *Riigieksam 1999(15 punkti*)

a) **Ühes klassis on 6 tüdrukut ja 4 poissi. Ühel päeval tuli kooli ainult 9 neist. Kui suur on tõenäosus, et puuduja oli tüdruk?**

b) **Klassis on 8 tüdrukut ja 6 poissi. Ühel päeval tuli kooli ainult 12 neist. Kui suur on tõenäosus, et mõlemad puudujad olid**

1. poisid;

2. samast soost?

Lahendus. Tõenäosuse leidmisel kasutame valemit $p(A)=\frac{m}{n}$, kus m on soodsate sündmuste võimaluste arv ja n kõikide sündmuste arv.

a) Tähistame sündmuse, et puuduja oli tüdruk A. Õpilaste arv oli n = 6 + 4 = 10 ja soodsate võimaluste arv ehk tüdrukute arv n = 6. Tõenäosus, et puuduja oli tüdruk on $p(A)=\frac{6}{10}=0{,}6$.

b) Klassis on 8 + 6 = 14 õpilast. Leiame esmalt, et mõlemad puudujad olid poisid tõenäosuse. Tähistame sündmuse B. Puudujate arv oli 14 – 12 = 2. Kõikide võimaluste arv on $n=C_{14}^{2}=91$. Soodsate võimaluste arv $m=C_{6}^{2}=15$. Tõenäosus on $p(B)=\frac{15}{91}\approx 0{,}165$.

Teiseks leiame tõenäosuse, et mõlemad puudujad oleksid samast soost. Tähistame selle sündmuse C. Tõenäosuse, et mõlemad puudujad on poisid oleme juba leidnud. Leiame nüüd sama tüdrukute korral. Nn. soodsate võimaluste arvu, st. mõlemad on tüdrukud annab $C_{8}^{2}=28$. Sündmuse C tõenäosuse jaoks soodsate võimaluste arvu saame liitmisreegli põhjal (kas tüdrukud **või** poisid) $m=15+28=43$. Seega $p(C)=\frac{43}{91}\approx 0{,}473$.

Vastus. Tõenäosus, et puuduja oli tüdruk on 0,6. Tõenäosus, et mõlemad puudujad olid poisid on 0,165 ja samast soost 0,473.

3) *Riigieksam 2000 (15 punkti*). **Riiulil on 15 raamatut, millest 3 on teatmeteosed ja ülejäänud on õpikud.**

a) **Riiulilt võetakse juhuslikult üks raamat, vaadatakse ja pannakse riiulile tagasi. Kui suur on tõenäosus, et võetud raamat on kas teatmeteos või õpik?**

b) **Järgnevalt võetakse riiulilt juhuslikult 4 raamatut.**

(1) **Kui palju on võimalusi riiulilt 4 raamatu võtmiseks?**

(2) **Leidke tõenäosus, et võetud 4 raamatu hulgas ei ole ühtki teatmeteost.**

(3) **Kui suur on tõenäosus, et võetud 4 raamatu hulgas on ainult üks teatmeteos?**

Lahendus.

a) Sündmuse tõenäosus on 1, sest tegemist on kindla sündmuse toimumisega kuna muid raamatuid peale teatmeteoste ja õpikute riiulil ei olnud.

b) Vaatleme järgmisi olukordi.

1. Võimaluste arv 4 raamatu võtmiseks 15-st raamatust on

$$C_{15}^{4}=\frac{15!}{4!\cdot(15-4)!}=1365.$$

2. Tõenäosuse leidmisel kasutame valemit $p(A)=\frac{m}{n}$, kus m on soodsate sündmuste võimaluste arv ja n kõikde sündmuste arv. Olukord, kus võetud 4 raamatu hulgas ei ole ühtki teatmeteost, tähendab seda, et kõik 4 on õpikud.

Tähistame sündmuse A. Õpikuid oli 15 – 3 = 12. Soodsate võimaluste arv on $m = C_{12}^4 = 495.$ Kõikide võimaluste arvu leidsime juba eelmises punktis n = 1365. Saame $p(A) = \dfrac{495}{1365} \approx 0{,}363.$

3. Vaadeldava sündmuse tähistame B. Nelja raamatu hulgas peaks olema nüüd 1 teatmeteos ja 3 õpikut. Leiame soodsate võimaluste arvu. Teatmeteoste võtmise võimalusi on $C_3^1 = 3$ ja õpikutel $C_{12}^3 = 220$. Kõikide võimaluste arv oli $C_{15}^4 = 1365.$ Leiame tõenäosuse kasutades korrutamise reeglit (teatmeteos **ja** õpikud) $p(B) = \dfrac{3 \cdot 220}{1365} \approx 0{,}484.$

Vastus. Tõenäosus, et võetud raamat on kas teatmeteos või õpik on $1.$ Võimaluste arv 4 raamatu võtmiseks 15-st raamatust on $1365.$ Tõenäosus, et võetud 4 raamatu hulgas ei ole ühtki teatmeteost on 0,363. Tõenäosus, et võetud 4 raamatu hulgas on ainult üks teatmeteos on 0,484.

4) *Riigieksam 2001 (15 punkti*).

a) **Aiand saatis tellijale K 13 kasti ja tellijale L 16 kasti maasikaid. Tellijale K saadetud kastide hulgas oli 3 kasti ja tellijale L saadetud kastide hulgas 2 kasti poolvalminud marjadega. Leidke tõenäosus, et saadud kastide juhuslikul võtmisel**

1. **tellija K võtab esimesena küpsete marjadega kasti;**
2. **tellija L võetud viie kasti hulgas on kaks poolvalminud marjadega kasti.**

b) **Aiand saatis tellijale M 14 kasti maasikaid. Iga kast võib saada transportimisel muljuda tõenäosusega 0,2. Millise tõenäosusega saab tellija M 11 muljumata kasti?**

Lahendus.

a) Olgu sündmus K küpsete marjadega kasti saamine.
Soodsaid võimalusi on 13 – 3 = 10 ja kaste üldse 13 (see on kõikide võimaluste arv). Vastavalt klassikalise tõenäosuse valemile $p = \dfrac{m}{n}$, kus m on soodsate võimaluste arv ja n kõikide võimaluste arv) on sündmuse K toimumise tõenäosus $p(K) = \dfrac{10}{13} \approx 0{,}769$.
Olgu sündmus L kahe poolvalminud ja kolme küpsete marjadega kasti saamine. Vastavalt korrutamisreeglile ja kombinatsioonide arvule on soodsaid võimalusi $C_2^2 \cdot C_{16-2}^3 = 1 \cdot \dfrac{14!}{3! \cdot 11!} = \dfrac{12 \cdot 13 \cdot 14}{2 \cdot 3} = 2 \cdot 13 \cdot 14 = 364$ võimalust. Üldse saab 5 kasti marju valida 16 kasti hulgast $C_{16}^5 = \dfrac{16!}{5! \cdot 11!} = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{120} = 24 \cdot 13 \cdot 14 = 4368$ erineval viisil. Sündmuse L tõenäosus $p(L) = \dfrac{364}{4368} = \dfrac{1}{12} \approx 0{,}083$.

b) Kasutame Bernoulli valemit $P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}$, kus p tähistab üksiku soodsa katse (võtab muljumata kasti) toimumise tõenäosust p = 1 - q = 1 - 0,2 = 0,8 (sest ühel katsel on 2 võimalikku teineteist välistavat tulemust) ja q tähistab ebasoodsa (muljutud) saamise tõenäosust: q = 0,2. Arv k tähistab soodsate katsete arvu k = 11

(muljumata kasti) ja n = 14 katsete kogu arvu (kastide arv).

$P_{14,11} = C_{14}^{11} \cdot 0{,}8^{11} \cdot 0{,}2^{3} \approx 0{,}250$.

Vastus. Tõenäosus, et saadud kastide juhuslikul võtmisel

1. tellija K võtab esimesena küpsete marjadega kasti on 0,769;
2. tellija L võetud viie kasti hulgas on kaks poolvalminud marjadega kasti on 0,083.

Tõenäosus, et tellija M saab 11 muljumata kasti on 0,25.

31) Juhatuses on 5 inimest. Igaüks neist saab järgmisele koosolekule tulla tõenäosusega 0,5. Kui tõenäoline on, et koosolek on otsustusvõimeline, kui selleks peab kohal olema vähemalt 4 juhatuse liiget?

Lahendus. Kasutame Bernoulli valemit $P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}$, kus p = 0,5 on tõenäosus, et liige saab tulla koosolekule. Järelikult vastandsündmuse (juhatuse liige ei saa kohale tulla) tõenäosus on samuti

q = 1 – p = 1 – 0,5 = 0,5.

Koosoleku otsustusvõime sõltub sellest, kas kohal on 4 (tuleb leida $P_{5,4}$) või kõik 5 (tuleb leida $P_{5,5}$) liiget. Tähistame küsitud sündmuse A. Leiame tõenäosuste summa, kuna kohal võib olla 4 **või** 5 liiget.

$$p(A) = P_{5,4} + P_{5,5} = C_5^4 p^4 q^{5-4} + C_5^5 p^5 q^{5-5} = C_5^4 0{,}5^4 0{,}5 + C_5^5 0{,}5^5 0{,}5^0 =$$

$$= 5 \cdot 0{,}5^5 + 1 \cdot 0{,}5^5 = 6 \cdot 0{,}5^5 \approx 0{,}188.$$

Vastus. Tõenäosus, et koosolek on otsustusvõimeline, on 0,188.

KIRJELDAV STATISTIKA.

1) Statistiliste andmete esmane korrastamine on arvandmete kirjutamine arvude kasvamise (kahanemise) järjekorras, mille tulemusena saadakse **variatsioonrida.**

2) Statistilised andmed korrastatakse **sagedustabelisse** - see on kaherealine tabel, mille ühes reas on tunnuse x erinevad väärtused ja teises nende esinemise sagedused. Sagedustabel näitab, mitmel korral antud tunnus esineb.

X	x_1	x_2	...	...	...	...	x_m
Sagedus(f)	f_1	f_2	...	...	...	...	f_m

Sagedustabeli andmed võib esitada ka tulpdiagrammina.

3) Suhteline sagedus (w) on tunnuse väärtuse esinemise arvu f suhe väärtuste koguarvu n ning väljendatakse osana protsentides $\frac{f}{n} \cdot 100\%$.

4) Variatsiooni ulatus on tunnuse suurima ja vähima väärtuse vahe $x_{max}-x_{min}$.

5) Mood Mo on tunnuse kõige sagedamini esinev väärtus.

6) **Mediaan Me** on tunnuse väärtus, millest väiksemaid ja suuremaid väärtusi on võrdne arv.
7) **Keskväärtus ehk keskmine** $\bar{x}$ on tunnuse kõigi väärtuste aritmeetiline keskmine.
Variatsioonreast $\bar{x} = \dfrac{x_1 + ... + x_k}{k}$ või sagedustabelist $\bar{x} = \dfrac{x_1 \cdot f_1 + ... + x_k \cdot f_k}{k}$.
8) **Hälve** on tunnuse väärtuse ja keskväärtuse vahe absoluutväärtus.
$$d_m = |x_m - \bar{x}|.$$
9) **Keskmine hälve** on hälvete aritmeetiline keskmine.
$$\bar{d} = \frac{|x_1 - \bar{x}| \cdot f_1 + ... + |x_k - \bar{x}| \cdot f_k}{k}.$$
10) **Dispersioon** on hälvete ruutude keskväärtus $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i}{n}$

11) **Standardhälve** iseloomustab tunnuse hajuvust. Mida suurem on standardhälve, seda suurem on hajuvus.
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i}{n}}$$

NÄITEÜLESANDED.

1) *Riigieksam 1998 (15 punkti*). **Kahes koolis A ja B valis mõlemas matemaatika riigieksami 15 õpilast. Eksamiprotokolli hindepunktide statistiline rida koolil A oli:**
35, 40, 82, 67, 33, 50, 75, 61, 87, 45, 38, 47, 75, 49, 62
ja koolil B
74, 54, 85, 94, 44, 79, 35, 48, 54, 35, 79, 57, 28, 66, 80.
Leidke kummagi kooli õpilaste hindepunktide aritmeetiline keskmine, mediaan ja standardhälve. Kumma kooli hindepunktid hajuvad vähem?

Lahendus. Kooli A hindepunktide aritmeetiline keskmine on
$\bar{x} = \dfrac{35+40+82+67+33+50+75+61+87+45+38+47+75+49+62}{15} = 56{,}4$ ja koolil
B $\bar{x} = \dfrac{74+54+85+94+44+79+35+48+54+35+79+57+28+66+80}{15} = 60{,}8$.
Mediaani leidmiseks on mõistlik moodustada variatsioonrida. Koolil A
33, 35, 38, 40, 45, 47, 49, 50, 61, 62, 67, 75, 75, 82, 87 ja koolil B
28, 35, 35, 44, 48, 54, 54, 57, 66, 74, 79, 79, 80, 85, 94.
Siit saame mediaanideks, st. hindepunktid, millest väiksemaid ja suuremaid väärtusi on võrdne arv, on koolil A 50 ja koolil B 57.

Standardhälve leiame valemiga

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(33-56{,}4)^2 + (35-56{,}4)^2 + (38-56{,}4)^2 + (40-56{,}4)^2 + (45-56{,}4)^2 + \ldots + (87-56{,}4)^2}{15}} \approx 17{,}1$$

ja koolil B

$$\sigma = \sqrt{\frac{(28-60{,}8)^2 + (35-60{,}8)^2 \cdot 2 + (44-60{,}8)^2 + (48-60{,}8)^2 + \ldots + (94-60{,}8)^2 +}{15}} \approx 19{,}8 \text{ V}$$

astus. Hindepunktide aritmeetilised keskmised on koolil A 56,4 ja koolil B 60,8. Mediaanid on koolidel vastavalt 50 ja 57 ning standardhälbed 17,1 ja 19, 8. Seega on kooli A hindepunktide hajuvus väiksem.

2) **Uuriti firmade tippjuhtide vanust täisaastates ja saadi 40, 39, 42, 42, 39, 42, 42, 40, 40, 39, 44, 43, 39, 41, 43, 41, 43, 43, 42, 42, 39, 42, 40, 40, 40, 42, 42, 40, 40, 40. Koostage nende andmete variatsioonrida, sagedustabel, leidke variatsiooniulatus, aritmeetiline keskmine, mood ja mediaan.**

Lahendus ja vastus. Variatsioonrida 39, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44.

Sagedustabel

Vanus x_k	39	40	41	42	43	44
Sagedus f	5	9	2	9	4	1

Variatsiooniulatus x_{max}-x_{min} = 44 – 39 = 5.

Aritmeetiline keskmine

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + \ldots .. + x_k \cdot f_k}{k} = \frac{5 \cdot 39 + 9 \cdot 40 + 2 \cdot 41 + 9 \cdot 42 + 4 \cdot 43 + 1 \cdot 44}{30} \approx 41{,}03.$$

Moodiks ehk tunnuse kõige sagedamini esinevaks väärtuseks on M_o = 42 aastat.

Mediaaniks ehk tunnuse väärtuseks, millest väiksemaid ja suuremaid väärtusi on võrdne arv on $M_e = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{41+41}{2}$ = 41.

3) *Riigieksam 2003 (5 punkti*) **.Tääksis mõõdeti eelmise aasta septembri esimesel poolel järgmised keskpäeva õhutemperatuurid (C°):**
20; 20; 22; 22; 22, 20; 22; 22; 20; 18; 15, 17; 18; 13; 10.
   a) **Esitage andmed variatsioonreana;**
   b) **Leidke antud andmete põhjal õhutemperatuuri mood ja mediaan;**
   c) **Moodustage antud õhutemperatuuride nelja klassiga (vahemikuga) sagedustabel, võttes klassi (vahemiku) pikkuseks 3° C.**

Lahendus ja vastus. Variatsioonrida on 10, 13, 15, 17, 18, 18, 20, 20, 20, 20, 22, 22, 22, 22, 22.

Kõige rohkem esineb variatsioonreas temperatuuri 22°C, st. M_o= 22° C. Mediaaniks, st. temperatuur, millest väiksemaid ja suuremaid väärtusi on võrdne arv on M_e= x_8 = 20° C. Viimaseks moodustame ühe võimalikest sagedustabelitest, jättes lahtiseks esimese ja viimase vahemiku.

°C	- 13	14 – 16	17 – 19	20 -
f	2	1	3	9

4) *Riigieksam 2004 (5 punkti*). **Müügipunkti otstarbekuse hindamiseks registreeriti päevade kaupa mobiiltelefonide oste. Päevade järjekorras saadi ostetud telefonide arvu statistiline rida 7; 10; 8; 12; 8, 8; 11; 15; 13; 10; 12; 12; 10; 12; 9.**

a) Korrastage statistiline rida;
b) Leidke mediaan.;
c) Leidke päevas ostetud telefonide keskmine arv.

Lahendus. Korrastatud staistiline rida ehk variatsioonrida on 7, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 15.
Mediaaniks, st.telefonide arv, millest väiksemaid ja suuremaid väärtusi on võrdne arv on $M_e = x_8 = 10$.
Päevas ostetud telefonide keskmine arv on

$$\bar{x} = \frac{7+8+8+8+9+10+10+10+11+12+12+12+12+13+15}{15} = 10{,}5.$$

Vastus. Korrastatud staistiline rida on 7, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 15. Mediaan on $M_e = x_8 = 10$. Päevas ostetud telefonide keskmine arv on $10{,}5 \approx 11$.

Riigieksam 2003 (5 punkti). Õngitsemise võistlusel püüti 12 ahvenat. Püüdmise järjekorras olid kalade pikkused järgmised:

a. 15; 21, 16; 17; 33; 13; 26, 17; 14; 21; 19; 22.
b. Kirjutage välja ahvenate pikkuste variatsioonrida.
c. Arvutage ahvenate keskmine pikkus.
d. Mitme kala pikkus erineb keskmisest vähem kui 3 cm? Mitu protsenti see arv moodustab püütud kalade arvust? ***V:*** 13, 14, 15, 16, 17, 17, 19, 21, 21, 22, 26, 33; $\bar{x} = 19{,}5$; 6; 50%.
e.

Riigieksam 2003(5 punkti). Muhu õpilased mõõtsid eelmise aasta septembri kuu esimesel poolel järgmised keskpäeva õhutemperatuurid (ºC):

f. 21; 23; 20; 23, 19; 14; 20; 20; 25; 20; 19; 20; 21, 17; 12.
g. Esitage andmed variatsioonreana;
h. Leidke antud andmete põhjal õhutemperatuuri mood ja mediaan;
i. Moodustage antud õhutemperatuuride nelja klassiga (vahemikuga) sagedustabel, võttes klassi (vahemiku) pikkuseks 3º C.

V: 12, 14, 17, 19, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 21, 23, 23, 25; $M_o = 20^\circ C; M_e = x_8 = 20^\circ C$;

ºC	- 15	16 – 18	19 – 21	22 -
f	2	1	9	3

HARJUTUSÜLESANDED.

1) Pargi uuendamiseks osteti puukoolist 7 istikut. Iga istiku kasvamaminemise tõenäosus on 0,8. Leia tõenäosus, et

a) täpselt 4 istikut läheb kasvama ***V:***0,115

b) kasvama läheb vähemalt 5 ***V:***0,852

c) milline on kõige tõenäosem kasvamaminevate istikute arv? ***V:***6

2) Aadul on rahakotis 4 10-sendist ja 3 20-sendist münti.

a) Mitu erinevat võimalust on

1. kahe *10*-sendilise mündi võtmiseks;
2. kahe erineva väärtusega mündi võtmiseks?

b) Leia tõenäosus, et rahakotist juhuslikult võetud kaks münti on

1. mõlemad 10-sendilised;
2. erineva väärtusega mündid;
3. sama väärtusega mündid? ***V:*** b) 1. $\frac{2}{7}$; 2. $\frac{4}{7}$; 3. $\frac{3}{7}$

3) *Riigieksam 1997* Kunstnik kinkis koolile 5 erineva süžeega maali. Maalid riputati saali seinale ritta juhuslikus järjekorras. Kui palju erinevaid järjestusi on piltide ülesriputamiseks? Kui suur on tõenäosus, et maal raamatut lugeva tüdrukuga satub vasakult esimeseks? Kas tõenäosus muutub, kui tüdrukuga pilt peaks asuma täpselt keskel? *V:* 120; 0,042

4) *Riigieksam 1998.* Ühes kastis on 5 kollast ja 3 valget tennisepalli, teises kastis on 4 kollast ja 6 valget tennisepalli.

a) Mõlemast kastist võetakse juhuslikult üks pall. Leia tõenäosus, et võetud pallid on sama värvi? ***V:***0,475

b) Mõlemast kastist võetakse juhuslikult kaks palli. Kui tõenäone on saada 4 kollast palli? ***V:***0,048

5) *Riigieksam 1999.*

a) Ühes urnis on 6 musta ja 4 valget kuuli. Juhuslikult võetakse üks kuul. Kui suur on tõenäosus, et valitud kuul osutub valgeks? ***V:***0,4

b) Urnis on 8 valget ja 6 musta kuuli. Juhuslikult võetaks kaks kuuli. Kui suur on tõenäosus, et sel korral

(1) mõlemad kuulid on mustad ***V:***0,165

(2) mõlemad kuulid on sama värvi? ***V:***0,473

6) *Riigieksam 2000.* Karbis on 8 sinist ja 4 musta pastapliiatsit.

a) Karbist võetakse juhuslikult üks pliiats, vaadatakse värvi ja pannakse karpi tagasi. Kui suur on tõenäosus, et võetud pliiats on sinine või must? 1

b) Järgnevalt võetakse karbist juhuslikult 5 pliiatsit.

(1) Kui palju on erinevaid võimalusi karbist 5 pliiatsi võtmiseks? ***V:***792

(2) Leia tõenäosus, et 5 pliiatsist 2 on sinised ja 3 on mustad? ***V:***0,141

(3) Kui suur on tõenäosus, et võetud pliiatsitest kõik on sinised? ***V:***0,071

7) *Riigieksam 2001.*

a) Laost saadetakse poodi A 15 ja poodi B 12 külmikut. Transportimisel sai kannatada 2 poodi A ja 3 poodi B saadetud külmikut. Leia tõenäosus, et külmikute juhuslikul valimisel:

1. poest A ostetud külmik ei ole saanud kannatada ***V:***0,867
2. poest B ostetud viiest külmikust on üks kannatada saanud. ***V:***0,477

b) Laos on valged ja pruunid külmikud. Külmikute juhuslikul võtmisel on valge külmiku saamise tõenäosus 0,7. Värvi vaatamata viidi sellest laost poodi C 16 külmikut. Kui suur on tõenäosus, et poodi C viidud külmikutest 12 on valged? ***V:***0,20

8) *Riigieksam 2002.* Laenutuses on 12 telki, millest 5 on väga hea vihmapidavusega. Lea tõenäosus, et:

a) Juhuslikult võetud telk on väga hea vihmapidavusega;

b) Kolmest juhuslikult võetud telgist on kõik väga hea vihmapidavusega. ***V:*** $\frac{5}{12}; \frac{1}{22}$

9) *Riigieksam 2002(5 punkti*). Laos olnud 14 jalgrattast on 4 tugevdatud raamiga. Leia tõenäosus, et:

a) Juhuslikult võetud jalgratas on tugevdatud raamiga;

b) Kahest juhuslikult võetud jalgrattast mõlemad on tugevdatud raamiga. ***V:*** $\frac{2}{7}; \frac{6}{91}$

10) *Riigieksam 2003 (5 punkti*). Kaaluti üle 20 ravimitabletti, millest 12 olid normaalkaaluga ja ülejäänud veidi raskemad, need pandi eraldi. Hiljem valati kogemata kõik tabletid jälle ühte purki. Leidke tõenäosus, et purgist juhuslikult võetud

a) tablett on normaalkaaluga;

b) kahest tabletist üks on normaalkaaluga ja teine veidi raskem. ***V:*** $\frac{3}{5}; \frac{48}{95}$.

11) *Riigieksam 2004 (5 punkti*). Lilleseemne idanemise tõenäosus on 0,75. Leidke tõenäosus, et

a) lilleseeme ei idane;

b) kaheteistkümnest lilleseemnest idaneb kümme. ***V:*** 0,25; 0,232

12) *Riigieksam 2005 (5 punkti*). Esimesel riiulil on 6 eesti- ja 4 ingliskeelset raamatut, teisel riiulil 5 eesti- ja 3 ingliskeelset raamatut. Leidke tõenäosus, et

a) esimeselt riiulilt juhuslikult võetud raamat on eestikeelne;

b) võttes kummaltki riiulilt juhuslikult ühe raamatu, on mõlemad raamatud samas keeles. ***V:*** $\frac{3}{5}; \frac{21}{40}$.

13) *Riigieksam 2006 (5 punkti*). Katseks vajalik kemikaal on ampullides kahes karbis. Ühes karbis on 16 ampulli, millest 2 on aegunud sisuga ja teises karbis on 19 ampulli, millest 4 on aegunud sisuga. Õpilane võtab juhuslikust karbist juhusliku ampulli. Leidke tõenäosus, et õpilane võtab

a) ampulli karbist, milles on aegunud sisuga ampulle vähem;

b) aegumata sisuga ampulli. ***V:*** $\frac{1}{2}; \frac{253}{304}$.

14) *Riigieksam 2007 (5 punkti*). Urnis on 10 kollast ja 6 rohelist kuuli. Leidke tõenäosus, et urnist

a) juhuslikult võetud kuul on roheline;

b) juhuslikult korraga võetud kaks kuuli on mõlemad rohelised. ***V:*** $\frac{3}{8}; \frac{1}{8}$

15) *Riigieksam 2008 (10 punkti*). Laagris on 7 õpilast, kellest 2 on väga head sportlased.

a) Leidke tõenäosus, et
1. seitsme õpilase hulgast juhuslikult välja kutsutud õpilane on väga hea sportlane;
2. seitsme õpilase hulgast juhuslikult välja kutsutud õpilane ei ole väga hea sportlane.

b) Mitu erinevat võimalust on treeneril selles laagris neljaliikmelise võistkonna moodustamiseks?

c) Kui suur on tõenäosus, et juhuslikult moodustatud neljaliikmelisse võistkonda sattuvad ka mõlemad väga head sportlased? *V:* $\frac{2}{7}; \frac{5}{7}; 35; 0,286$

16) *Riigieksam 2009 (10 punkti*). 30 õpilasest puudus matemaatika tunnist 20%.

Puudujatest $\frac{2}{3}$ olid poisid ja see moodustas 20% klassi poiste koguarvust. Mitu tüdrukut oli matemaatika tunnis? Selles samas matemaatika tunnis kutsuti tahvli juurde juhuslikult

a) üks õpilane. Kui suur on tõenäosus, et see õpilane oli poiss?
b) kaks õpilast. Kui suur on tõenäosus, et üks neist oli tüdruk ja teine poiss?
c) neli õpilast. Kui suur on tõenäosus, et vähemalt 3 neist olid tüdrukud? ***V:*** 8 tüdrukut; 2/3; 32/69;1/11

17) *Riigieksam 2011 (10 punkti*). Kastis on 3 punase, 4 roosa ja 5 kollase gladiooli sibulat.
1) Kastist võeti1 juhuslik sibul. Kui suur on tõenäosus, et see on kollane gladiool?
2) Võeti korraga neli sibulat. Kui suur on tõenäosus, et
a) kõik on erinevat värvi;
b) saadi 2 kollast ja 2 punast gladiooli;
c) saadi vähemalt 3 roosat gladiooli ? **V:** 5/12;0;2/33;1/15.

18) *Riigieksam 2012 (10 punkti*). Urnis on 10 ühesugust kuuli, millest 3 on sinist, 5 musta ja 2 valget värvi. Urnist võetakse korraga 3 juhuslikku kuuli. Leidke tõenäosus, et urnist võetud kuulidest
a) kõik 3 on musta värvi;
b) kõik 3 on erinevat värvi;
c) vähemalt 1 on valget värvi. **V:** 1/12;1/4;8/15

19) *Riigieksam 2013 (10 punkti*). Parklas on 12 autot, neist 3 on sinist, 4 musta ja 5 halli värvi. Parklast lahkub üheaegselt 3 autot. Leidke tõenäosus, et lahkuvatest autodest 1) üks on punast värvi; 2) kaks on sinist ja üks on musta värvi; 3) kõik kolm on ühte värvi; 4) vähemalt kaks on halli värvi. ***V:***0; 0,055; 0,068; 0,364.

20) *Riigieksam 2014 (5 punkti*). Poes on müügil melonid kolmest riigist – Marokost, Hispaaniast ja Kreekast. Melonid ei erine väliselt, küll aga erinevad maitse poolest. Müügisaali letil on 5 Marokos, 7 Hispaanias ja 3 Kreekas kasvatatud melonit. Leidke tõenäosus, et
1) üks juhuslikult valitud melon on kasvatatud Kreekas;
2) üks juhuslikult valitud melon ei ole pärit Marokost;
3) kaks juhuslikult valitud melonit on mõlemad kasvatatud Hispaanias ***V:*** 0,2; 0,667; 0,2.

21) *Riigieksam 2015 (5 punkti*). Osteti pakk Kreeka pähkleid. Tõenäosus, et pakist võetakse tuumata (seest tühi) pähkel, on maaletooja väitel 0,05. Kui suur on tõenäosus, et pakist juhuslikult võetud
1) viiest pähklist on täpselt 2 pähklit tühjad;
2) kümnest pähklist on vähemalt 1 pähkel tühi? ***V:***0,021; 0,401.

22) *Riigieksam 2016 (10 punkti)* Laulukonkursi eelvoorus osales 216 laulu. Neist 12,5% valis žürii lõppvooru. Väljavalitud lauludest $\frac{5}{9}$ olid inglise keeles ja ülejäänud eesti keeles. Oletame, et kõikidel lõppvooru pääsenud lauludel on võrdsed võimalused konkurss võita.
1. Mitu laulu pääses lõppvooru?
2. Mitu eestikeelset ja mitu ingliskeelset laulu pääses lõppvooru?
3. Kui suur on tõenäosus, et lõppvooru pääsenud lauludest
a) võidab konkursi eestikeelne laul?
b) on kõik esikolmiku laulud ingliskeelsed?
c) on esikolmikus vähemalt kaks eestikeelset laulu? ***V:*** 27; eesti 12 ja inglise 15; 0,444; 0,156; 0,414.

23) *Riigieksam 2016 (10 punkti)* Laulukonkursi eelvoorus osales 160 laulu. Neist 15% valis žürii lõppvooru. Väljavalitud lauludest $\frac{3}{8}$ olid eesti keeles ja ülejäänud inglise keeles.

a) Mitu laulu pääses lõppvooru?
b) Mitu eestikeelset ja mitu ingliskeelset laulu pääses lõppvooru?
c) Oletame, et kõikidel lõppvooru pääsenud lauludel on võrdsed võimalused konkurss võita. Kui suur on tõenäosus, et lõppvooru pääsenud lauludest võidab konkursi ingliskeelne laul?
d) jääb kolmandaks saksakeelne laul?

Oletame, et lõppvooru pääsenud lauludest tuleb moodustada kolmik, milles on üks eestikeelne ja kaks ingliskeelset laulu. Kui palju erinevaid võimalusi on tingimustele vastava kolmiku moodustamiseks?

V: 24 laulu; 9 laulu ja 15 laulu; $\frac{5}{8}$,0 ; 945 võimalust.

24) *Riigieksam 2017K (10 punkti)* Ajakirjas oli loogikaülesanne, mille lahendajad võisid saada auhindu. Oma lahenduse saatis 10 erinevat inimest ja lahenduste eest jagati punkte järgmiselt: 27; 30; 30; 27; 24; 32; 30; 29; 25; 32. Nende lahendajate vahel, kelle tulemus oli keskmisest lahendustulemusest suurem, loositi välja kaks ühesugust auhinda.

a) Koostage lahendustulemuste põhjal sagedustabel. Mitu lahendajat osales auhindade loosimisel?
b) Mitmel erineval viisil võis jagada kaks auhinda?
c) Kui suur oli tõenäosus, et auhinna sai lahendaja, kelle tulemus oli 24 punkti?
d) Kui suur oli tõenäosus, et auhinnad läksid kahele parimale lahendajale?

V: 6 lahendajat, 15 võimalust; 0; $\frac{1}{15}$.

25) *Riigieksam 2017L (10 punkti)* Ajakirjas oli ristsõna, mille õigesti lahendajad osalesid nelja ühesuguse auhinna loosimises. Oma lahenduse saatis 250 erinevat inimest. 94% lahendustest olid valed.

a) Mitme lahendaja hulgast loositi 4 auhinnasaajat?
b) Mitmel erineval viisil võis õigesti lahendanute vahel jagada neli auhinda?
c) Kui suur oli tõenäosus õige lahenduse korral auhinnast ilma jääda? *V:* 15 lahendajat, 1365 võimalust; $\frac{11}{15}$.

26) *Riigieksam 2018K (10 punkti)* Kirjastuses töötab 8 toimetajat: 2 meest ja 6 naist. Nende hulgast valiti juhuslikult 2 käsikirja toimetajat.

1. Mitu erinevat võimalust oli 2 toimetaja valimiseks?
2. Kui suur oli tõenäosus, et mõlemad juhuslikult valitud toimetajad olid mehed?
3. Üks toimetaja märkas viga tõenäosusega 0,95 ja teine tõenäosusega 0,80. Kui suur on tõenäosus, et

    1) mõlemad toimetajad märkasid viga?
    2) vähemalt üks toimetaja märkas viga? *V:* 28; 0,036; 0,76; 0,99.

27) *Riigieksam 2018L (5 punkti)* Suveniiripoes müüakse ühesugustesse karpidesse pakitud siniseid ja punaseid kruuse. Igas karbis on üks kruus. Riiulil oli 10 sinise kruusiga karpi ja 14 punase kruusiga karpi. Kui suur on tõenäosus sellelt riiulilt nelja juhusliku karbi võtmisel saada
1) üks sinine ja kolm punast kruusi?
2) vähemalt kolm punast kruusi? *V:* 0,343; 0,437.

28) *Riigieksam 2019L (5 punkti)*
Laual on kuus ühesugust kaarti, igal kaardil üks arv.

1	-2	3^{-4}	$\sqrt{5}$	6	$-\frac{1}{8}$

Kaardid pööratakse ringi, segatakse ja võetakse juhuslikult kaks kaarti. Kui suur on tõenäosus, et:

1) Mõlemal kaardil on täisarv;
2) Vähemalt ühel kaardil on negatiivne arv? *V:* 0,2; 0,6

29) *Riigieksam 2019K (10 punkti)*
Karbis on 32 väliselt ühesugust kommi. Osa neist on pähklitäidisega, ülejäänud marjatäidisega. Tõenäosus sellest karbist saada pähklitäidisega komm on 0,25.

1. Mitu pähklitäidisega ja mitu marjatäidisega kommi on karbis?
2. Kui sellest karbist võtta korraga kaks juhuslikult kommi, siis kui suur on tõenäosus, et
    a. Mõlemad kommid on marjatäidisega;
    b. Mõlemad kommid on erineva täidisega;
    c. Vähemalt üks komm on pähklitäidisega? *V:* 0,556; 0,387; 0,444

30) *Riigieksam 2020L (5 punkti)* Riina lahendas valikvastustega testi, milles oli kolm ülesannet. Igal ülesandel oli neli vastusevarianti, millest ainult üks oli õige. Riina valis kõikide ülesannete vastused juhuslikult. Kui suur on tõenäosus, et

1) kõik valitud vastused olid valed;
2) vähemalt kaks valitud vastustest olid õiged? *V:* $\frac{27}{64}; \frac{5}{32}$

31) *Riigieksam 2020K (10 punkti)*
Laual on 2 karpi pärlitega. Kõik pärlid on ühesuurused ja erinevad üksteisest vaid värvi poolest. Ühes karbis on 5 musta ja 6 valget pärlit ning teises karbis 4 musta ja 5 valget pärlit.
1. Kummast karbist ühte pärlit võttes on valge pärli saamise tõenäosus suurem?
2. Mõlemast karbist võeti üks pärl. Kui suur on tõenäosus, et võetud pärlid on mõlemad valged? *V: 2. karbist;* $\frac{10}{33}$

32) *Riigieksam 2021K (5 punkti)*
Klass, kus õpib 32 õpilast, osales koolidevahelisel statistikavõistlusel ja võitis hea esinemise eest auhinnaks 24 kinopiletit. Kinopileti saajad otsustati valida juhuslikult. Selleks võeti 32 ühesugust ümbrikku, neist 24 sisse pandi pilet ja 8 ümbrikku jäeti tühjaks. Kõik ümbrikud suleti ja õpilased valisid üksteise järel nende seast ümbriku.

a) Kui suur osa selle klassi õpilastest jäi kinopiletist ilma?
b) Kui suur on tõenäosus, et esimese ümbriku võtnud õpilane sai kinopileti?
c) Kui suur on tõenäosus, et nii esimesena kui teisena võtnud õpilane sai kinopileti?

V: 25%; 0,75; $\frac{69}{124} \approx 0,556$

33)*Riigieksam 2020L (10 punkti)* Sõbrad Kati ja Mart mängivad noolemängu. Kati tabab märklaua südamikku tõenäosusega $\frac{5}{6}$ ja Mart tõenäosusega $\frac{6}{7}$.

1. Kui suur on tõenäosus, et
a) nii Kati kui ka Mart tabavad esimese viskega märklaua südamikku?
b) vähemalt üks sõpradest tabab esimese viskega märklaua südamikku?
2. Mõlemad sõbrad teevad 5 viset. Põhjendage arvutustega, kas suurem on tõenäosus, et
a) Kati tabab märklaua südamikku täpselt 3 korral või
b) Mart tabab märklaua südamikku täpselt 4 korral? *V:* $\frac{5}{7};\frac{41}{42};\approx 0,161;\approx 0,386$