

KORDAMINE RIIGIEKSAMIKS X
KUJUNDI PINDALA (RUUMALA) LEIDMINE INTEGRAALI ABIL

1) Esmalt tuleta meelde olulisemad **integreerimisvalemid ja reeglid**.

$\int 0 dx = C$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

2) Summa (vahe) integraal võrdub liidetvate integraalide summaga (vahega)

$$\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

3) Konstantse teguri võib tuua integraali märgi alt integraali ette.

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

4) **Newton-Leibnizi valem määratud integraali arvutamiseks**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ kus } F'(x) = f(x)$$

$$\text{ehk } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

5) **Määratud integraali $\int_a^b f(x) dx$ arvutamiseks**

a) leitakse integreeritava funktsiooni algfunktsioon;

b) leitakse algfunktsiooni väärtused ülemise ja alumise raja kohal;

c) lahutatakse algfunktsiooni väärtusest ülemise raja kohal algfunktsiooni väärtus alumise raja kohal.

6) Kui kõvertrapetsi kõverhaar on funktsiooni $y = f(x)$ graafikul ja laused on võetud kohtadel a ja b, siis selle **kõvertrapetsi pindala avaldub valemiga** $S = F(b) - F(a)$, kus $F'(x) = f(x)$.

7) Lisaks eelpool toodud omadustele on kasulik meeles pidada ka järgmisi omadusi:

a) Kui vahetada integraali rajad, siis muutub integraali märk vastupidiseks.

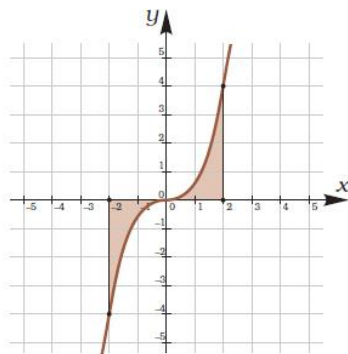
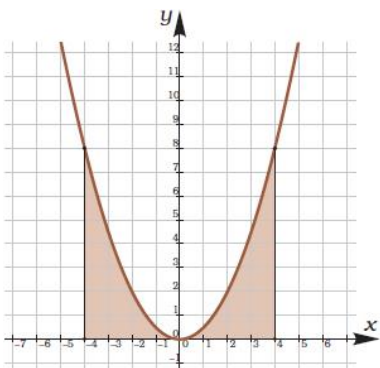
$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

b) Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a;b]$, siis

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

c) Kui funktsioon $f(x)$ on paarisfunktsioon, siis $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

d) Kui funktsioon $f(x)$ on paaritu funktsioon, siis $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

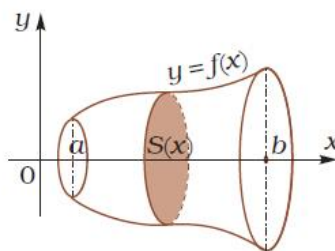


e) Kui kõvertrapets asub allpool x -telge, siis saad kõvertrapetsi pindalaks tema vastandaru.

f) Kui kujundit piiravad kaks joont, siis saame otsitava pindala kahe kõvertrapetsi pindalade vahena.

8) Kui pöörkeha piiravad tasandid $x=a$ ja $x=b$ ($a < b$) ning pind, mis tekib lõigus $[a;b]$ integreeruva funktsiooni $f(x)$ graafiku pöörlemisel ümber x -telje, siis avaldub

ruumala valemiga $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.



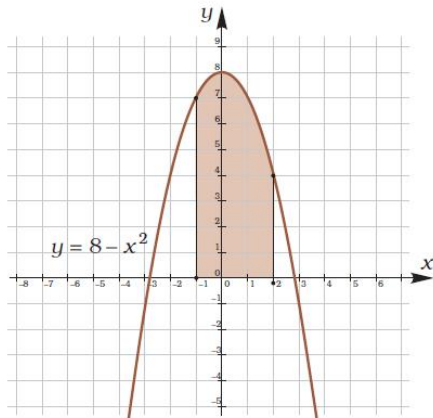
NÄITEÜLESANDED

1) Leia $\int_{-1}^2 (8 - x^2) dx$.

Integreeritava funktsiooni algfunktsioon on $8x - \frac{x^3}{3}$.

Rakendades Newton-Leibnizi valemit saame

$$\int_{-1}^2 (8 - x^2) dx = \left(8x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \left(8 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(8 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 13\frac{1}{3} - \left(-7\frac{2}{3} \right) = 21$$



Kõvertrapetsi pindala on 21 ü².

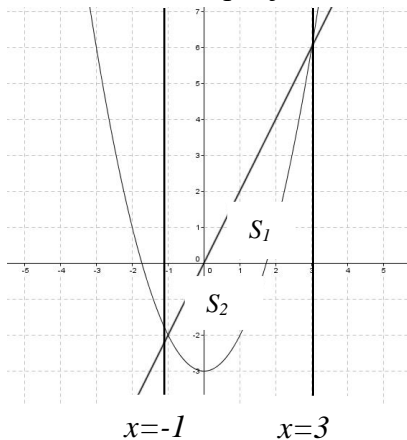
2) Leia funktsioonide $y = x^2 - 3$ ja $y = 2x$ graafikutega piiratud kujundi pindala.

Lahendus.

Leiame esmalt graafikute lõikepunktide abstsissid (integreerimisrajad).

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{cases} \text{ ehk } x^2 - 3 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Viete'i teoreemi põhjal leiame lahendid $x_1 = -1, x_2 = 3$.

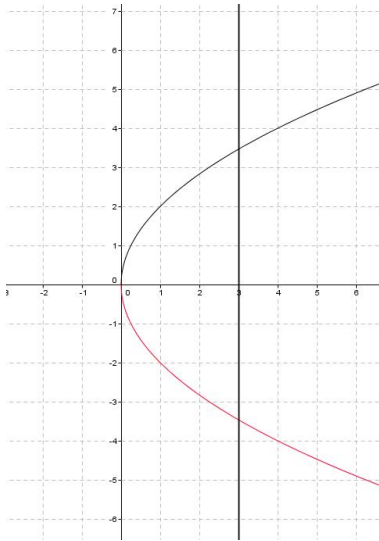


Seega

$$\int_{-1}^3 S_1 - S_2 = \int_{-1}^3 [2x - (x_2 - 3)] dx = \int_{-1}^3 (2x - x^2 + 3) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x \right) \Big|_{-1}^3 = 9 - \frac{27}{3} + 9 - \left(1 + \frac{1}{3} - 3 \right) = 10 \frac{2}{3} (\text{ü}^2)$$

Vastus. Kujundi pindala on $10 \frac{2}{3} \text{ü}^2$.

- 3) Vaatame kujundit, mis tekib joone $y = 2\sqrt{x}$ pöörlemisel ümber x- telje. Tekkinud nõ kausi sügavuseks on 3 üh. Leia „kausi“ ruumala.



Lahendus.

$$V = \pi \int_0^3 (2\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^3 4x dx = \pi \cdot 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \pi \cdot 2x^2 \Big|_0^3 = 18\pi (\text{ü}^3)$$

Vastus. Pöördkeha ruumala on $18\pi \text{ü}^3$.

- 4) Riigieksam 2001 Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides A(1; 1), B(3; 1), C(4;4).
 a. Küljeks BC on parabooli $y = -x^2 + ax - 20$ kaar. Leia kordaja a väärtus.
 b. Punktid A_1 ja C_1 on vastavalt punktide A ja C projektsioonid. Arvuta trapetsi A_1C_1CA pindala.
 c. Arvuta kujundi ABC pindala

Lahendus.

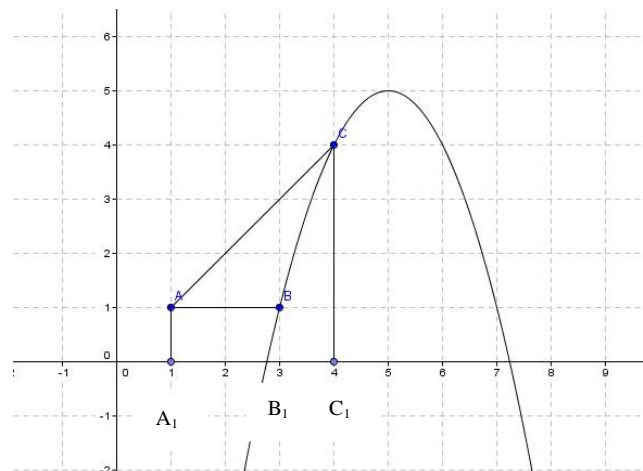
- a) Kuna punktid B ja C asuvad paraboolil, siis valides ühe nendest punktidest (näiteks C) ja pannes parabooli võrrandisse, saame

$$4 = -16 + 4a - 20$$

$$a = 10$$

- b) Trapetsi A_1C_1CA alused on $AA_1 = 1$ üh, $C_1C = 4$ üh ning kõrgus $A_1C_1 = 3$ üh.

$$\text{Trapetsi pindala on } S = \frac{1+4}{2} \cdot 3 = 7,5 (\text{üh}^2).$$



- c) Kujundi ABC pindala arvutamiseks lahutame trapetsi A_1C_1CA pindalast ristküliku AA_1B_1B ja kõvertrapetsi B_1C_1CB pindala.
Ristküliku AA_1B_1B pindala $S=1 \cdot 2=2$ (üh²).
Kõvertrapetsi B_1C_1CB pindala

$$S = \int_3^4 (-x^2 + 10x - 20) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 20x \right) \Big|_3^4 = -\frac{64}{3} + 5 \cdot 16 - 80 + \frac{27}{3} - 5 \cdot 9 + 60 = 2\frac{2}{3} (\text{üh}^2)$$

Kujundi ABC pindala $S = 7,5 - 2 - 2\frac{2}{3} = 2\frac{5}{6} (\text{üh}^2)$.

ÜLESANDED

- Leia kujundi pindala, mis on piiratud funktsiooni $y = -x^2 + 4x - 4$ graafiku ja koordinaattelgedega. **V:** $2\frac{2}{3} \text{üh}^2$
- Leia joontega $y = 2(x-1)(3-x)$ ja $y = 2(x-1)^2$ piiratud kujundi pindala. Tee joonis.
V: $\frac{2}{3} \text{ü}^2$.
- Leia integraalid.
 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x) dx$ **V:** 5
 - $\int \frac{2x + 3x^2}{3x} dx$ **V:** $\frac{2}{3}x + \frac{x^2}{2} + c$
- Kaardil oli märgitud pinnatükk, mida piiravad jooned $y = 3x^2 + 3x$ ja $y = x^2 + 2x + 1$. Võrdle selle pinnatüki osi, mis jäävad vastavalt ülespoole ja allapoole x -telge. Kumb neist on suurem ja mitmeme protsendi võrra? Skitseeri joonis. **V:** ülemine ja 125%.
- Riigieksam 1997. Arvuta joontega $y = -x^2 - 2x + 3$ ja $y = -5$ piiratud kujundi pindala. Tee joonis. **V:** 36ü^2 .
- Riigieksam 1998. On antud jooned $y = \sin x$ ja $y = \cos x$
 - Milliste x -i väärtuste korral lõigust $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ on nende joonte puutujad paralleelsed? **V:** $x = -\frac{\pi}{4}$
 - Leia sirgetega $x=0$ ja $x=\frac{\pi}{2}$ ning antud joontega piiratud kujundi pindala.
V: $2\sqrt{2} - 2$
- Riigieksam 1998. Kujund on piiratud joontega $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ ja $x = \ln 3$
 - Arvuta kujundi pindala. Tee joonis. **V:** 2üh^2
 - Leia x -telje punkt a , mida läbiv vertikaalsirge poolitab antud kujundi pindala.
V: $a = \ln 2$

8) Leia pöörkkeha ruumala, mis tekib, kui x-telje ümber pöörleb joontega $2x - 3y + 6 = 0$, $x = -1$, $x = 2$ ja $y = 0$ piiratud kujund. **V:** $V = 17\frac{2}{3}$ üh³

9) Riigieksam 2000. Kujund on piiratud joontega $y = -x^2$, $y = 4x + 4$ ja $y = -4x + 4$. Arvuta kujundi pindala. Tee joonis. **V:** $5\frac{1}{3}$ üh²

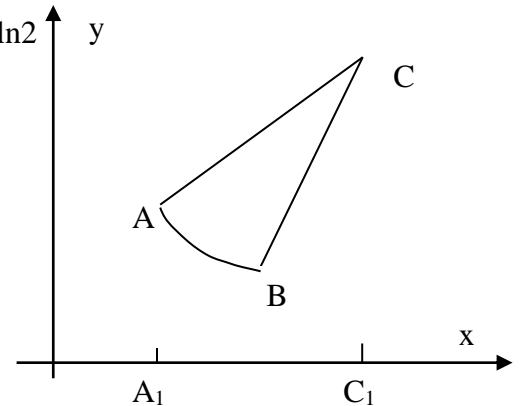
10) Riigieksam 2000. Kujund on piiratud joontega $y = x^2$, $y = 4x - 4$ ja $y = -4x - 4$. Arvuta kujundi pindala. Tee joonis. **V:** $5\frac{1}{3}$ üh²

11) Riigieksam 2001. Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides A(0,5; 2), B(1; 1), C(3,3).

a) Küljeks AB on hüperbooli $xy = a$ kaar, Leia kordaja a väärtus.

b) Punktid A₁ ja C₁ on vastavalt punktide A ja C projektsioonid. Arvuta trapetsi A₁C₁CA pindala.

c) Arvuta kujundi ABC pindala **V:** $a = 1; 6,25; 2,25 - \ln 2$



12) Riigieksam 2001. Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides A(1; 1), B(2; 0,5), C(3,3).

a) Küljeks AB on hüperbooli $xy = a$ kaar, Leia kordaja a väärtus.

b) Punktid A₁ ja C₁ on vastavalt punktide A ja C projektsioonid. Arvuta trapetsi A₁C₁CA pindala.

c) Arvuta kujundi ABC pindala **V:** $a = 1; 4; 2,25 - \ln 2$

13) Riigieksam 2014 Joonisel on funktsioonide $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ ja $g(x) = 5 - x$ graafikud.

a) Viiruta antud joontega piiratud kujund.

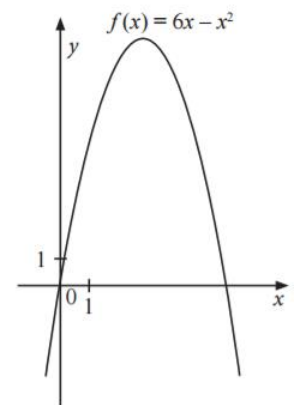
b) Arvuta selle viirutatud kujundi pindala. **V:** $4,5$ ü²

14) Riigieksam 2016 Joonisel on ruutfunktsiooni $f(x) = 6x - x^2$ graafik.

1. Arvutage selle ruutfunktsiooni nullkohad ja graafiku haripunkti koordinaadid.

2. Viirutage kujund, mida piiravad antud funktsiooni graafik ja x-telg ning arvutage selle kujundi pindala.

V: $X_0 = \{0;6\}; H(3;9); 36$ ü².

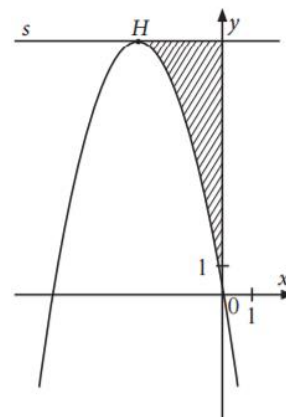


15) Riigieksam 2016 Joonisel on ruutfunktsiooni $f(x) = ax^2 + bx$ graafik ja x -teljega paralleelne sirge s , mis läbib funktsiooni $f(x)$ graafiku haripunkti $H(-3; 9)$.

1. Arvutage kordajate a ja b väärtused ning leidke sirge s võrrand.

2. Arvutage viirutatud kujundi pindala.

V: $f(x) = -x^2 - 6x$; $y = 9$; 9 ü^2 .



16) Riigieksam 2017L

1. Kõvertrapetsit K piiravad jooned $y = x^2 - 4x + 6$; $y = 1$; $x = 1$ ja $x = 4$. Joonestage ja viirutage kõvertrapets K .

2. Arvutage kõvertrapetsi K pindala. V: 6 ü^2

17) Riigieksam 2017K V: 9 ü^2 ; saab

Ülesanne 3. (10 punkti)

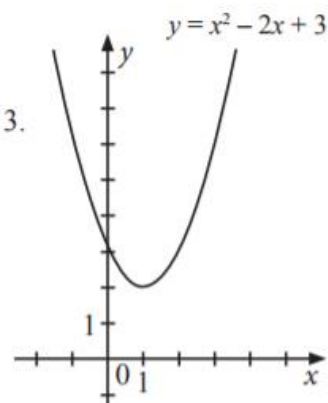
Joonisel on ruutfunktsiooni $y = x^2 - 2x + 3$ graafik.

Kõvertrapetsit K piiravad jooned $y = x^2 - 2x + 3$; $y = 0$; $x = 0$ ja $x = 3$.

1. Joonestage ja viirutage kõvertrapets K .

2. Arvutage kõvertrapetsi K pindala.

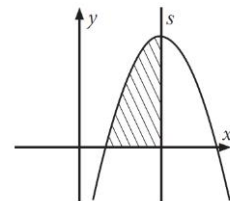
3. Kas kõvertrapetsist K saab välja lõigata ristküliku, mille pindala on 6 pindalaühikut? Põhjendage oma vastust.



18) Riigieksam 2018K Joonisel on ruutfunktsiooni $y = 6x - x^2 - 5$ graafik ja y -teljega paralleelne sirge s , mis läbib parabooli haripunkti.

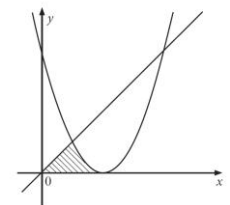
1. Koostage sirge s võrrand.

2. Arvutage viirutatud kujundi pindala. V: $x = 3$; $5 \frac{1}{3} \text{ ü}^2$



19) Riigieksam 2018L Joonisel on sirge $y = x$ ja parabool $y = x^2 - 4x + 4$.

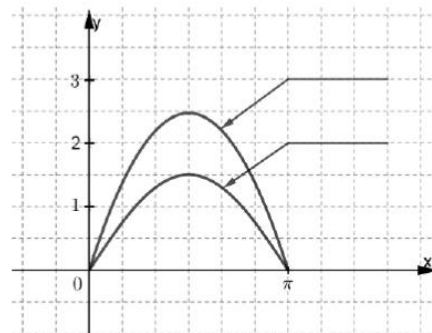
Arvutage joonisel viirutatud kujundi pindala. V: $\frac{5}{6} \text{ ü}^2$



20) Riigieksam 2019L Joonisel on funktsioonide $f(x)=1,5\sin x$ ja $g(x)=\pi x-x^2$ graafikud lõigul $[0; \pi]$.

1. Leidke joonise abil, kumma funktsiooni väärtused on vahemikus $(0; \pi)$ suuremad. Märkige joonisele nende funktsioonide valemid.

2. Arvutage integraal $\int_0^{\pi} 1,5\sin x dx$. Viirutage joonisel kujund, mille pindala selle integraali abil leidsite. $V:3 \text{ ü}^2$



;

21) Riigieksam 2019K Joonisel on funktsiooni $f(x)=-x^2+4x$ graafik (vt joonist).

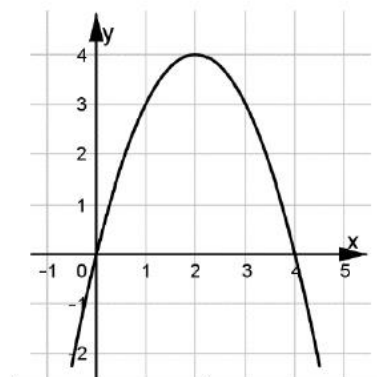
1. Arvutage punktide A , B ja C koordinaadid, kui punkt C on parabooli haripunkt ning punktid A ja B on funktsiooni $f(x)$ graafiku lõikepunktid x -teljega.

2. Joonestage kolmnurk ABC ja arvutage selle kolmnurga pindala.

3. Kõvertrapetsit piiravad x -telg ja funktsiooni $f(x)$ graafik. Arvutage kõvertrapetsi pindala.

4. Mitme protsendi võrra on kolmnurga ABC pindala kõvertrapetsi pindalast väiksem?

$V: A(0;0), B(4;0), C(2;4); 8\text{ü}^2; 10\frac{2}{3} \text{ü}^2; 25\%$



22) Riigieksam 2020L Kujundit piiravad jooned $y = x^2 - 6$, $y = x^2 - 2x$ ja $x = -1$.

1. Tehke joonis ja viirutage antud joontega piiratud kujund.

2. Sirge $y = -2$ jaotab kujundi kaheks osaks. Arvutage mõlema osa pindala. $V:16 \text{ü}^2; 7 \text{ü}^2$ ja 9ü^2

23) Riigieksam 2020K Kõvertrapetsit piiravad jooned $y = 0$ ja $y = 8 + 2x - x^2$ (vt joonist).

1. Arvutage kõvertrapetsi pindala.

2. Mitme protsendi võrra on ristküliku $ABCD$ pindala kõvertrapetsi pindalast suurem? $V:36 \text{ü}^2$ ja 50%

