KORDAMINE RIIGIEKSAMIKS II

VÕRRANDID JA VÕRRATUSED.

1) Lineaarvõrrandi normaalkuju on $ax + b = 0$, kus ax on lineaarliige ja b vabaliige. Lineaarvõrrandil

- **a)** puuduvad lahendid, kui $a = 0$ ja $b \neq 0$
- **b)** on lahendeid lõpmatult palju, kui $a = 0$ ja $b = 0$
- **c)** üks lahend, kui $a \neq 0$ ja see avaldub kujul $x = -\frac{b}{a}$.

2) Ruutvõrrandi normaalkuju on $ax^2 + bx + c = 0$, kus a on ruutliikme kordaja, b lineaarliikme kordaja ning c vabaliige.

- **a)** Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendivalem

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

- **b)** Avaldist b^2-4ac nimetatakse ruutvõrrandi diskriminandiks (tähistame D) ning ruutvõrrandil
  - *(1)* on kaks erinevat lahendit, kui $D > 0$
  - (2) on kaks võrdset lahendit, kui $D = 0$
  - (3) lahendid puuduvad, kui $D < 0$

c) Taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendamiseks kasutatakse

- *(4)* Viete`i valemeid: $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 \cdot x_2 = q$
- (5) või lahendivalemit $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

3) Kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemil $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

- **a)** on üks lahend, kui $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;
- **b)** on lõpmatult palju lahendeid, kui $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;
- **c)** pole lahendeid, kui $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Lineaarvõrrandisüsteeme lahendatakse

1. liitmisvõttega (võrrandeid teisendatakse nii, et ühe muutuja kordajad oleksid teineteise vastandarvud);
2. asendusvõttega (ühest võrrandist avaldatakse üks muutuja ja asendatakse see teise võrrandisse).
3. lineaarseid võrrandisüsteeme võib lahendada ka graafiliselt või determinantide abil.

4) Kolme tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine determinantide abil (Crameri valemid).

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_2x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

a) Leia võrrandisüsteemi determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

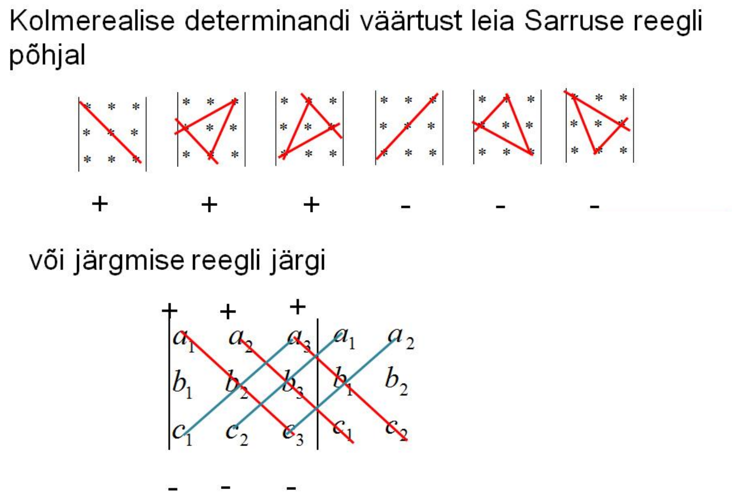
b) $D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

c) Tundmatute väärtused $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$ ja $z = \frac{D_z}{D}$.

d) ja vastuseks kirjuta välja võrrandisüsteemi lahend;

Pea meeles, et võrrandisüsteemil lahend puudub või on lõpmatult palju lahendeid, kui $D = 0$.

Determinandi väärtuse leidmine.



5) Murdvõrrandi $\frac{F(x)}{G(x)} = 0$ lahendamiseks kasutame tingimust $\begin{cases} F(x) = 0 \\ G(x) \neq 0 \end{cases}$.

Näide.

Lahendame võrrandi $\frac{1}{x^2 - 9} - \frac{4}{x+3} = -1$. Viime esmalt võrrandi normaalkujule.

$$\frac{1}{x^2 - 9} - \frac{4}{x+3} + 1 = 0$$

$$\frac{1 - 4(x-3) + x^2 - 9}{x^2 - 9} = 0$$

$$\frac{1 - 4x + 12 + x^2 - 9}{x^2 - 9} = 0$$

$$\frac{x^2-4x-4}{x^2-9}=0$$

Kasutame murru nulliga võrdumise tingimust

$$\begin{cases} x^2-4x-4=0 \\ x^2-9\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2-4x-4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=2$$

Kontroll.

$$v=\frac{1}{2^2-9}-\frac{4}{2+3}=\frac{1}{-5}-\frac{4}{5}=-\frac{5}{5}=-1 \quad v=p$$

Vastus. Võrrandi lahend on x = 2.

5) Juurvõrrandi lahendamine.

Juurvõrrandiks nimetatakse võrrandit, kus tundmatu on juure märgi all.
Kindlasti tuleb saadud lahendit alati kontrollida, sest võrrandi poolte paarisarvulise astendajaga astendamisel võivad tekkida võõrlahendid.

Näide. Lahenda võrrand $x+\sqrt{x^2-x+10}=7$.

$$\sqrt{x^2-x+10}=7-x \,\Big|\, (\;)^2$$

$$x^2-x+10=(7-x)^2$$

$$x^2-x+10=49-14x+x^2$$

$$-x+14x=49-10$$

$$13x=39 \,|\, :13$$

$$x=3$$

Kontroll. $vp\; 3+\sqrt{3^2-3+10}=3+\sqrt{16}=3+4=7$ *vp=pp*

Lahend. *x = 3.*

Näide. Lahenda võrrand

$$x-\sqrt{25-x^2}=1$$

$$x-1=\sqrt{25-x^2} \,\Big|\, (\;)^2$$

$$x^2-2x+1=25-x^2$$

$$x^2+x^2-2x+1-25=0$$

$$2x^2-2x-24=0$$

$$x^2-x-12=0$$

$$x_1=4 \quad x_2=-3$$

Kontroll. $vp\; 4-\sqrt{25-4^2}=4-\sqrt{9}=4-3=1$

$vp=pp$

$vp\; -3-\sqrt{25-(-3)^2}=-3-\sqrt{16}=-3-4=-7$

$vp\neq pp$, *st* $x=-3$ *on võõrlahend*

Lahend. *x=4.*

6) Absoluutväärtust sisaldavad võrrandid.

$$|a| = \begin{cases} a, \ kui\ a \geq 0 \\ -a, \ kui\ a < 0 \end{cases}$$

Lahenda võrrand $|x-3| = 4$

$x - 3 = 4 \quad \Rightarrow x = 7$

$-(x-3) = 4 \quad \Rightarrow -x+3 = 4 \quad \Rightarrow x = -1$

$x - 3 = -4$

Kontroll. $x_1 = 7 \quad |7-3| = |4| = 4 \ vp=pp$

$x_2 = -1 \quad |-1-3| = |-4| = 4 \quad vp = pp$

Lahendid. $x_1 = 7,\ x_2 = -1$

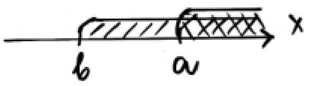
7) Lineaarvõrratuse on *ax + b < 0 (ax + b > 0)* lahendihulk avaldub kujul

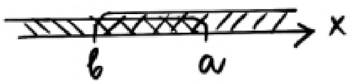
Kui ax + b > 0 ja a > 0, siis x > $-\dfrac{b}{a}$

Kui ax + b > 0 ja a < 0 , siis x < $-\dfrac{b}{a}$

8) Lineaarvõrratuse süsteemi lahendamiseks leiame mõlema lahendipiirkonna ühisosa:
Eeldame, et a > b

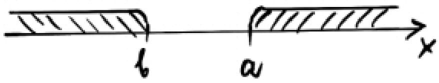
I $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$ II $\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$ III $\begin{cases} x > b \\ x < a \end{cases}$





lahend: $x > a,\ ]a;\infty[$ $x < b,\ ]-\infty;b[$ $b < x < a,\ ]b;a[$

IV $\begin{cases} x < b \\ x > a \end{cases}$



ja lahendid puuduvad (ühisosa puudub).

Näide.

$2x - 3 < 3x + 7$

$2x - 3x < 7 + 4$

$-x < 11 | \cdot (-1)$

$x > -11 \ ehk \ x \in]-11;\infty[$

Pea meeles, et võrratuse poolte läbi korrutamisel (jagamisel) negatiivse arvuga muutub võrratuse märk vastupidiseks.

9) Ruutvõrratuse $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) lahendamiseks leiame ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ nullkohad (selleks lahendame ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$), mis kanname x-teljele. Seejärel skitseerime parabooli ning jooniselt leiame võrratuse lahendihulga.

Lahendame võrratuse $ax^2 + bx + c > 0$

1) Kui $D > 0$, siis ruutvõrrandil on kaks erinevat lahendit x_1 ja x_2 , mis kanname arvteljele ning skitseerime läbi nende kõvera (parabooli), Kui $a > 0$, siis parabool avaneb üles ja, kui $a < 0$, siis parabool avaneb alla.

$a > 0$ $(x_1 < x_2)$ $\qquad\qquad$ $a < 0$

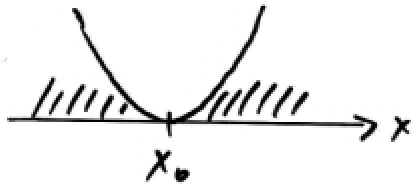
Lahendid:

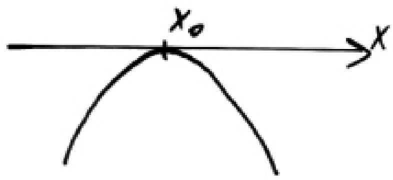
$x < x_1,\ x > x_2$ $\qquad\qquad$ $x_1 < x < x_2$

$]-\infty; x_1[\cup]x_2; \infty[$ $\qquad\qquad$ $]x_1; x_2[$

2) Kui $D = 0$, siis $x_1 = x_2 = x_0$

$a > 0$ $\qquad\qquad$ $a < 0$

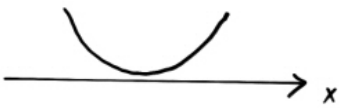


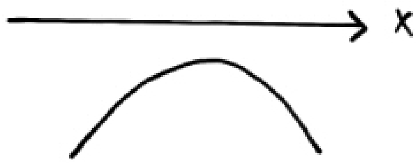


$x < x_0; x > x_0$ $\qquad\qquad$ lahendid puuduvad

3) Kui $D < 0$, siis nullkohad puuduvad.

$a > 0$ $\qquad\qquad$ $a < 0$





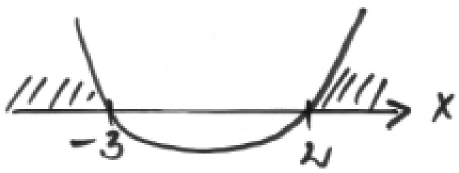
Lahendid: $x \in$ R $\qquad\qquad$ Lahendid puuduvad

Näide.

Lahendame ruutvõrratuse $x^2 + x - 6 > 0$.

a) Leiame avaldise nullkohad. Selleks lahendame ruutvõrrandi $x^2 + x - 6 = 0$. Viete´i teoreemi põhjal saame lahenditeks $x_1 = 2$ ja $x_2 = -3$

b) Skitseerime ruutfunktsiooni $y = x^2 + x - 6$ graafiku



c) Leiame joniselt lahendihulga $\left]-\infty;-3\right[\cup\left]2;\infty\right[$.

10) Murdvõrratuseks nimetatakse võrratust, mis avaldub kujul

$$\frac{F(x)}{G(x)}<0 \text{ (või } \frac{F(x)}{G(x)}>0\text{)}$$

Murdvõrratuse lahendamiseks asendame jagatise korrutisega ning kasutame lahenduseks intervallide meetodit. Murdvõrratuse lahendite hulka ei kuulu nimtaja nullkohad.

11) Intervallide meetod.

Võrratuse, mis on esitatud kujul *(x – x1) (x – x2) ... (x – xn) < 0 (> 0)* lahendamiseks kasutame intervallide meetodit. Selleks

a) kanname arvteljele nullkohad x_1, x_2, x_3, ...x_n;

b) alustades paremalt ülalt liigume abijoonega läbides nullkohad (NB! kui võrratuse kõrgeim aste on negatiivne, siis paremalt alt);

c) abijoon lõikab nullkohti paaritu arv kordsusega punktides ning puudutab nullkohti paarisarv kordsusega punktides;

d) leiame joniselt võrratuse lahendihulga.

Näide. Lahendame murdvõrratuse $\dfrac{(x-2)(2+3x)}{x-3}>0$.

Selleks

a) asendame murru korrutisega $\dfrac{(x-2)(2+3x)}{x-3}>0 \Leftrightarrow (x - 2)(2 + 3x)(x - 3) > 0$;

b) määrame korrutise nullkohad $x_1 = 2$, $x_2 = -1{,}5$, $x_3 = -3$;

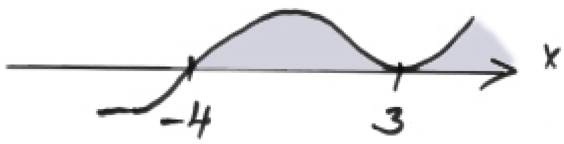
c) kanname nullkohad x-teljele ja skitseerime abijoone;

d) leiame joniselt võrratuse lahendihulga $x\in\left]-1{,}5;2\right[\cup\left]3;\infty\right[$.

Näide. Lahendame murdvõrratuse $\dfrac{(x-3)^2}{x+4}\ge 0$.

$$\frac{(x-3)^2}{x+4}\ge 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+4)\ge 0,\; x\ne -4$$

Leiame avaldise nullkohad $x_1 = 3$, $x_2 = -4$ ja kanname need x –teljele. Kuna nullkoht $x_1 =$ 3 on kahekordne, st. paarisarv kordsusega, siis abijoon puudutab selles punktis x- telge. Skitseerime abijoone ja leiame lahendihulga.

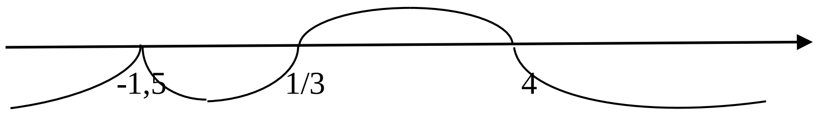


Vastus. Võrratuse lahendihulk on $x\in\left]-4;\infty\right[$.

Näide. Lahendame võrratuse $(3x-1)(4-x)(2x+3)^2 \le 0$

Leiame avaldise nullkohad

3x-1=0 $\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$, 4-x=0 $\Rightarrow x_2 = 4$, 2x+3=0 $\Rightarrow x_{3,4} = -1{,}5$. Kuna nullkoht $x_{3,4} = -1{,}5$ on kahekordne, st. paarisarv kordsusega, siis abijoon puudutab selles punktis x- telge. Avaldise kõrgeim aste x^4 on negatiivne, st alustame abijoonega paremalt alt.



Vastus. Võrratuse lahendihulk on $x \in \left]-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [4; \infty[$.

12) Eksponentvõrrandi lahendamine.

Eksponentvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles tundmatu esineb astendjana.

a) **Eksponentvõrrandi teisendamine võrrandiks, mille mõlemad pooled on ühe ja sama arvu astmed.**

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ja $a>0, a\neq 1$.

Näide. Lahenda võrrand $0{,}25^x = 16$.

Teisenda mõlemad võrrandi pooled arvu 4 astmeks

$4^{-x} = 4^2$

$-x = 2$

$x = -2$

Kontroll: *vp*. $0{,}25^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$ *vp=pp*

Vastus. $x = -2$.

b) **Tegurdamise võte.**

Näide. Lahenda võrrand $2^x + 2^{x-2} = 5$.

Toome 2^x sulgude ette:

$2^x(1 + 2^{-2}) = 5$

$2^x(1 + 0{,}25.) = 5$

$2^x \cdot \frac{5}{4} = 5$

$2^x = 5 \cdot \frac{4}{5}$

$2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$x = 2$

Kontroll: *vp*. $2^2 + 2^{2-2} = 4 + 1 = 5$ *vp=pp*

Vastus. $x = 2$

c) **Logaritmimisvõte.**

Seda võtet kasutatakse siis, kui on tegemist eksponentvõrrandiga $b = a^{f(x)}$ või võrrandiga $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, kus $a > 0$ $b > 0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$.

Näide. Lahenda võrrand $3^x \cdot 2^x = 24$.

Esitame antud võrrandi kujul $6^x = 24$. Logaritmides selle võrrandi mõlemaid pooli näiteks alusel 10 saame:

$\log 6^x = \log 24$;

$x \cdot \log 6 = \log 24$;

$x = \dfrac{\log 24}{\log 6} = 1{,}7737056 \approx 1{,}77$

Kontroll: Taskuarvuti abil leia $3^{1,77} \cdot 2^{1,77} \approx 24{,}012662 \approx 24$

Vastus. $x = \dfrac{\log 24}{\log 6} \approx 1{,}77$

d) Eksponentvõrrandi taandamine ruutvõrrandiks, kasutades abimuutujat.

Näide. Lahenda võrrand $7^{2x} - 6 \cdot 7^{x} + 5 = 0$.

Teeme muutujate vahetuse $7^x = u$.

Saame $u^2 - 6u + 5 = 0$, mille lahenditeks on $u_1 = 1$ ja $u_2 = 5$.

Edasi lahenda kaks eksponentvõrrandit:

$7^x = 1$ ja $7^x = 5$.

Esimese võrrandi lahendiks on $x_1 = 0$ ja teise lahendiks $x_2 = \dfrac{\log 5}{\log 7} \approx 0{,}827$

Kontrolli saadud tulemust iseseisvalt!

Vastus. $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\log 5}{\log 7} \approx 0{,}827$

13) Logaritmvõrrandi lahendamine.

Definitsioon $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,\ a \neq 1, a > 0.$

Logaritmide põhikomadused.

1) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

2) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

3) $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

4) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Logaritmvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles tundmatu esineb logaritmitavana või(ja) logaritmi aluses.

a) Võrrandid, mis lahenduvad vahetult logaritmi definitsiooni järgi.

Näide. Lahenda võrrand $\log_3(x - 1) = 2$.

Vastavalt logaritmi definitsioonile esita võrrand kujul

$3^2 = x - 1$, millest saame

$x = 9 + 1$

$x = 10$.

Kontroll: *vp* $\log_3(10 - 1) = \log_3 9 = 2$ *vp=pp*

Vastus. $x = 10$

b) Võrrandite lahendamine logaritmi omadusi kasutades.

Näide. Lahenda võrrand $\ln(4x - 5) - \ln(2x - 5) = \ln(2x + 1)$.

Esitame logaritmide vahe jagatise logaritmina, saame

$\ln \dfrac{4x-5}{2x-5} = \ln(2x+1)$

$\dfrac{4x-5}{2x-5} = 2x+1 \,\big|\cdot (2x-5) \neq 0$

$$4x-5=4x^2-10x+2x-5$$

$$4x^2-12x=0 \,|: 4$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

millest $x_1 = 0$ ja $x_2 = 3$.

Kontroll. $x_1 = 0$. Vp ln(0 – 5) – ln(0 – 5) = ln(– 5) – ln(– 5) väärtus puudub, kuna logaritmitav ei saa olla negatiivne. Järelikult $x_1 = 0$ ei ole lähtevõrrandi lahendiks.

$x_2 = 3$. vp ln(4·3 – 5) – ln(2·3 – 5)=ln 7 – ln 1=ln 7 -0=ln 7

pp ln(2·3+1)=ln 7

vp = pp

Vastus. $x = 3$.

Sama võrrandit oleks saanud lahendada ka alljärgnevalt (ei teki murdvõrrandit)

ln(4x – 5) = ln(2x – 5) + ln(2x + 1)

ln(4x – 5) = ln((2x – 5)·(2x + 1))

$$4x-5=4x^2-10x+2x-5$$

$$4x^2-12x=0 \,|: 4$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

millest $x_1 = 0$ ja $x_2 = 3$.

c) Võrrandi teisendamine ruutvõrrandiks.

Näide. Lahenda võrrand $\log_2^2 x + 4\log_2 x - 5 = 0$.

Asendame $\log_2 x = u$, saame ruutvõrrandi

$u^2 + 4u - 5 = 0$, mille lahendid on $u_1 = -5$ ja $u_2 = 1$.

Põhitundmatu x leidmiseks lahendame kaks võrrandit

$\log_2 x = 1$ ja $\log_2 x = -5$. Logaritmi definitsiooni põhjal

$x_1 = 2$ ja $x_2 = \frac{1}{32}$.

Kontrolli mõlemat lahendit lähtevõrrandiga.

Vastus. $x_1 = 2$ ja $x_2 = \frac{1}{32}$.

d) Üleminek ühelt logaritmi aluselt teisele.

Näide. Lahenda võrrand $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Teisenda kõik logaritmid alusele 2, siis esialgne võrrand esitub kujul

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 16}+\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+\log_2 x=7.$$

Kuna $\log_2 16 = 4$ ja $\log_2 4 = 2$, siis saame

$$\frac{1}{4}\cdot\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x=7.$$

Peale koondamist

$$1\frac{3}{4}\log_2 x=7$$

Kasutades logaritmi omadust

$$\log_2 x^{\frac{7}{4}}=7, \text{ millest}$$

$$x^{\frac{7}{4}}=2^7 \; ja$$

$x = 16$.

Kontrolli saadud tulemust iseseisvalt.
Vastus. $x = 16$.

14) **Eksponent – ja logaritmvõrratuste lahendamisel** kasutatakse samu meetodeid, mis olid kasutusel vastavate võrrandite lahendamise korral.

a) Eksponentvõrratuse $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ lahendamisel on kaks võimalust:

1. **kui a > 1**, siis võrratuse $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ lahendamiseks tuleb lahendada võrratus $f(x) < g(x)$ (astendajate võrratuse märk jääb sama pidi);
2. **kui 0 < a < 1**, siis võrratuse $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ lahendamiseks tuleb lahendada võrratus $f(x) > g(x)$ (astendajate võrratuse märk muutub vastupidiseks);

Näide. Lahenda eksponentvõrratus $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} \langle 25$.

Esita esialgne võrratus kujul
$5^{-(3-x)} < 5^2$ ehk $5^{x-3} < 5^2$.
Seega tuleb lahendada võrratus
$-3 + x < 2$ (võrratuse märk jääb sama pidi, sest astme alus on suurem ühest), millest
$x < 5$
Vastus. $x < 5$

b) Logaritmvõrratuse $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ lahendamisel lähtume järgmistest võimalustest:

1. kui $a > 1$, siis võrratusest $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ järelduvad võrratused $0 < f(x) < g(x)$;
2. kui $0 < a < 1$, siis võrratusest $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ järelduvad võrratused $0 < g(x) < f(x)$;

Näide. Lahenda logaritmvõrratus $\log(x - 2) – \log(27 – x) \leq 0$.
Esmalt teisenda võrratus kujule
$\log(x - 2) \leq \log(27 – x)$.
Kuna logaritmi alus on 10 (> 1), siis tuleb lahendada võrratused
$0 < x - 2 \leq 27 – x$ või võrratusesüsteem

$$\begin{cases} x - 2 \leq 27 - x, x \leq 14,5 \\ x - 2 > 0, x > 2 \\ 27 - x > 0, x < 27 \end{cases}$$

Kanna saadud lahendid arvteljele ja leia lahendite ühisosa!
Siit saame, et lahendihulk on L = $\left]2;14,5\right]$.

NÄITEÜLESANDED.

1) Lahenda parameetrit *a* sisaldav võrrand.
$\left(a^2 - 9\right)x = a - 3$
<u>*Lahendus.*</u>

$\left(a^2-9\right)x = a-3$

$(a-3)(a+3)x = a-3$

$(a-3)(a+3)x-(a-3) = 0$

$(a-3)\left[(a+3)x-1\right] = 0 \,|: (a-3) \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$

$(a+3)x-1 = 0$

$(a+3)x = 1 \,|: (a+3) \neq 0 \Rightarrow a \neq -3$

$x = \frac{1}{a+3}$

Vastus: võrrandi lahendiks on $x = \frac{1}{a+3}$, kus $a \neq \pm 3$.

2) Lahenda võrrand $\frac{14}{3z-12} - \frac{2+z}{z-4} - \frac{3}{8-2z} + \frac{5}{6} = 0$ ja kontrolli lahendit.

<u>*Lahendus.*</u>

$\frac{14}{3z-12} - \frac{2+z}{z-4} - \frac{3}{8-2z} + \frac{5}{6} = 0$

Toome nimetajas ühise teguri sulgude ette

$\frac{14}{3(z-4)} - \frac{2+z}{z-4} + \frac{3}{2(z-4)} + \frac{5}{6} = 0$

$\frac{28-6(2+z)+9+5(z-4)}{6(z-4)} = 0$

$\frac{28-12-6z+9+5z-20}{6(z-4)} = 0$

$\frac{5-z}{6(z-4)} = 0$

$\begin{cases} 5-z=0 \\ 6(z-4) \neq 0, \textit{millest järeldub } z \neq 4 \end{cases}$

$5-z = 0$

$z = 5$

Kontroll:

$v = \frac{14}{3 \cdot 5 - 12} - \frac{2+5}{5-4} - \frac{3}{8-2 \cdot 5} + \frac{5}{6} =$

$= \frac{14}{3} - \frac{7}{1} - \frac{3}{-2} + \frac{5}{6} = 4\frac{2}{3} - 7 + 1\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = 0$

$v = p$

Vastus: Võrrandi lahendiks on z = 5.

3) Lahenda võrrandisüsteem ja kontrolli lahendeid.

$\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0 \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$

<u>*Lahendus.*</u>

Lahendame antud võrrandisüsteemi asendusvõttega.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (3x-1)^2 + 2(3x-1) - 9 = 0$$

$$x^2 + 9x^2 - 6x + 1 + 6x - 2 - 9 = 0$$

$$10x^2 - 10 = 0 \,|\, :10$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

Leiame tundmatu y:

$$y_1 = 3 - 1 = 2, y_2 = -3 - 1 = -4$$

Lahendid on $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -4 \end{cases}$

Kontroll.

Kontrollime lahendeid esimese algvõrrandi jaoks.

Kui lahendiks on $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$, siis $v_1 = 1^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 - 9 = 1 + 4 + 4 - 9 = 0$ $v_1 = p_1$

Kui lahendiks on $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -4 \end{cases}$, siis $v_1 = (-1)^2 + (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 9 = 1 + 16 - 8 - 9 = 0$

$v_1 = p_1$

Kontrollime lahendeid teise võrrandiga.

Kui lahendiks on $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$, siis $v_2 = 3 \cdot 1 - 2 - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$ $v_2 = p_2$

Kui lahendiks on $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -4 \end{cases}$, siis $v_2 = 3 \cdot (-1) - (-4) - 1 = -3 + 4 - 1 = 0$ $v_2 = p_2$

Vastus. Võrrandisüsteemi lahendid on $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -4 \end{cases}$.

4) Lahendage võrratus $\dfrac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} > 10$.

Lahendus.

$$\frac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} > 10 \Rightarrow \frac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} - 10 > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 10x + 16 - 10x + 10}{x - 1} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 + 26}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow (x^2 + 26)(x - 1) > 0.$$

Kuna alati avaldis $x^2 + 26 > 0$, siis võime asendada lähtevõrratuse samaväärse võrratusega $x - 1 > 0 \Rightarrow$ x > 1.

Vastus. Võrratuse lahendiks on x > 1.

6) *(T. Lepmann, A.Telgmaa, A. Undusk, K. Velsker Matemaatika IX klassile)* **Hariliku murru nimetaja on lugejast ühe võrra suurem. Kui murru lugejat suurendada 8 korda ja nimetajat 2 võrra, siis saadakse murd, mille korrutis esialgse murruga on 1.**

Lahendus.

Olgu esialgse murru lugeja *x* ja nimetaja *x +1*, seega harilik murd avaldub kujul $\frac{x}{x+1}$.

Uue murru lugeja on *8x* ja nimetaja *x + 3*, seega uus murd on $\frac{8x}{x+3}$. Murdude korrutis on

$\frac{8x}{x+3}\cdot\frac{x}{x+1}=1$.

$$\frac{8x^2}{(x+3)(x+1)}-1=0 \Rightarrow \frac{8x^2}{(x+3)(x+1)}-1=0 \Rightarrow \frac{8x^2-1(x+3)(x+1)}{(x+3)(x+1)}=0$$

$$\frac{8x^2-x^2-4x-3}{(x+3)(x+1)}=0$$

$$\begin{cases}7x^2-4x-3=0\\(x+3)(x+1)\neq 0\end{cases}$$

$7x^2-4x-3=0$

$D=16+84=100$

$x=\frac{4\pm 10}{14}\quad x_1=1$

$x_2=-\frac{3}{7}$ ei sobi, kuna murru lugeja peab olema nullist erinev täisarv.

Kontroll. Olgu esialgse murru lugeja 1 ja nimetaja 2, siis saame murru $\frac{1}{2}$. Uue murru lugeja on $8\cdot 1 = 8$ ja nimetaja 2 + 2 = 4 ning saame murru $\frac{8}{4}$. Murdude korrutis

$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{4}=\frac{1\cdot 8}{2\cdot 4}=1$.

Vastus. See murd on $\frac{1}{2}$.

7) Leida kahekohaline arv, kui ta korrutis oma numbrite summaga on 144 ja üheliste number on kahe võrra suurem kümneliste numbrist.

Lahendus.

Olgu kümnelisi x, siis ühelisi on $x+2$ ja kahekohaline arv on $10x+x+2=11x+2$. Numbrite summa on $x+x+2=2x+2=2(x+1)$.

Koostame võrrandi: $(11x+2)\cdot 2(x+1)=144$

Lahendame saadud võrrandi:

$(11x+2)\cdot 2(x+1)=144 \,|:2$

$11x^2+11x+2x+2-72=0$

$11x^2+13x-70=0$

$x=\frac{-13\pm\sqrt{169+3080}}{22}=\frac{-13\pm 57}{22}$, $x_1=2$, ($x_2=-\frac{35}{11}$ ei sobi)

Kontroll. Kümneliste number on 2 ja üheliste number 4. Saame arvu 24. Korrutame arvu tema numbrite summaga (2 + 4 = 6). Saame $24\cdot 6 = 144$.

Vastus. See arv on 24.

8) *Riigieksam1999 (15 p.)* **Asulast A sõitis välja jalgrattur, et sõita asulasse B. Samaaegselt väljus asulast B mootorrattur, et sõita asulasse A. Kui Mootorrattur oli läbinud 1/3 teest, jäi jalgratturil sõita veel 26 km. Kui jalgrattur oli läbinud 1/3 teest, jäi mootorratturil sõita 5 km. Leida asulate vaheline kaugus.**

Lahendus.

Tähistame asulate vahelise kauguse x km, jalgratturi kiiruse y $\frac{km}{h}$ ja mootorratturi kiiruse z $\frac{km}{h}$. Mootorratturil kulub $\frac{1}{3}$ tee läbimiseks $\frac{\frac{1}{3}x}{z}$ tundi ja jalgratturil (x-26) kilomeetri läbimiseks $\frac{x-26}{y}$ tundi. Kuna nad väljusid üheaegselt, siis ajad on võrdsed. Saame võrrandi

$$\frac{x-26}{y}=\frac{\frac{1}{3}x}{z}.$$

Jalgrattur läbib ühe kolmandiku teest $\frac{\frac{1}{3}x}{y}$ tunniga ja mootorrattur vahemaa (x-5) km $\frac{x-5}{z}$ tunniga. Kuna ajad on jälle võrdsed, siis saame teise võrrandi

$$\frac{x-5}{z}=\frac{\frac{1}{3}x}{y}.$$

Koostame võrrandisüsteemi ja lahendame selle.

$$\begin{cases}\frac{x-26}{y}=\frac{x}{3z}\\ \frac{x-5}{z}=\frac{x}{3y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3z(x-26)=xy\Rightarrow y=\frac{3z(x-26)}{x}\\ 3y(x-5)=xz\end{cases}$$

Asendame y-i teise võrrandisse:

$$\frac{9z(x-5)(x-26)}{x}=xz\,\Big|:z\neq 0$$

9(x-5)(x-26) = x^2 $\Rightarrow$ 9x^2-234x-45x+1170-x^2 = 0

8x^2-279x+1170 = 0

$$x=\frac{279\pm\sqrt{77841-37440}}{16}=\frac{279\pm 201}{16}, x_1=30, x_2=4{,}875$$

Lahend x_2 ei sobi,kuna on liiga väike. Kontrollige lahendit x_1 iseseisvalt!

Vastus. Asulate vaheline kaugus on 30 km.

10) *Riigieksam 2002 (15p.)* **Kaks teed ristuvad täisnurga all. Esimesel teel liigub ristmiku poole veoauto kiirusega 40 km/h ja teisel teel liigub ristmiku poole sõiduauto 50 km/h. Teades, et antud hetkel on veoauto ristmikust 2 km ja sõiduauto 3 km kaugusel. Leidke mitmendal minutil on autod esimest korda teineteisest 1 km kaugusel.**

Lahendus.

Veoauto kiiruseks on $40\frac{km}{h}=\frac{40}{60}\frac{km}{\min}=\frac{2}{3}\frac{km}{\min}$.

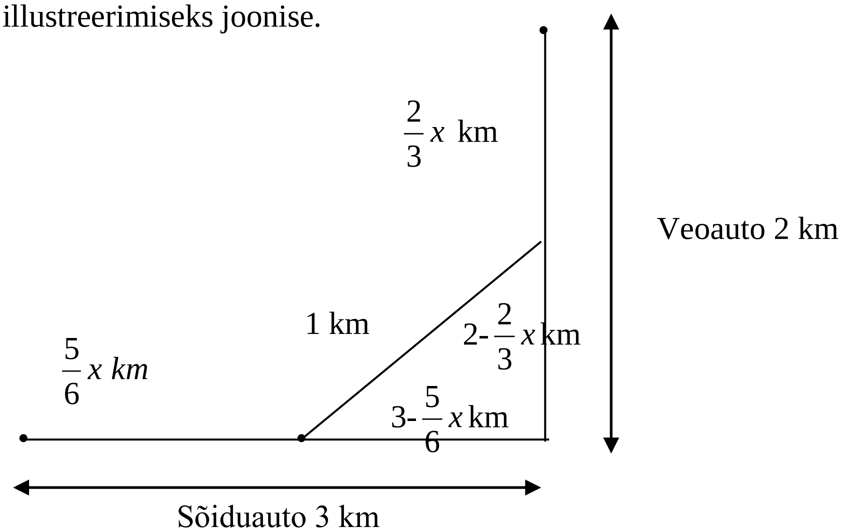
Sõiduauto kiiruseks on $50\frac{km}{h}=\frac{50}{60}\frac{km}{\min}=\frac{5}{6}\frac{km}{\min}$.

Sõidukit olgu teineteisest esimest korda 1 kilomeetri kaugusel x minuti pärast.

Veoauto läbib x minutiga $\frac{2}{3}x$ kilomeetrit ja sõiduauto $\frac{5}{6}x$ kilomeetrit.

Veoauto kaugus on ristmikust siis $\left(2-\frac{2}{3}x\right)$ kilomeetrit ja sõiduautol $\left(3-\frac{5}{6}x\right)$ kilomeetrit.

Teeme lahenduse illustreerimiseks joonise.



Võrrandi koostamiseks kasutame Pythagorase teoreemi:

$$\left(2-\frac{2}{3}x\right)^2+\left(3-\frac{5}{6}x\right)^2=1$$

$$4-\frac{8}{3}x+\frac{4}{9}x^2+9-5x+\frac{25}{36}x^2-1=0$$

$$12-\frac{23}{3}x+\frac{41}{36}x^2=0\Big|\cdot 36$$

$$41x^2-276x+432=0$$

$$x=\frac{276\pm\sqrt{76176-70848}}{82}=\frac{276\pm 73}{82}$$

$x_1\approx 2{,}5$

$x_2\approx 4{,}3$

x_2 ei sobi, kuna ülesandes on küsitud, millal autod esimest korda olid 1 km kaugusel.
Lahendit $x_1\approx 2{,}5$ kontrollige iseseisvalt.

Vastus. Autod on teineteisest 1 km kaugusel kolmandal minutil.

ÜLESANDED

1) Lahenda võrrandid ja kontrolli lahendit.

a) $\log_2(6-x)=5$

b) $\log_2(10-5x)=3\log_2 5$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x)=-4$

d) $\log_3(15-x)-\log_3 2=\log_3 1$

e) $4^{2x-17}=\dfrac{1}{64}$

f) $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{x-2}=2$

g) $\sqrt{44-5x}=3$

h) $\sqrt{\dfrac{3}{2x-11}}=\dfrac{1}{13}$ *V:-26;-23;-39;13;7;1,8;7;259*

2) Leia võrrandi $x=\dfrac{-6x+1}{x-6}$ vähim lahend. *V:*-1

3) Leia võrrandi $\sqrt{-6-7x}=-x$ suurim lahend. *V:* -1.

4) Lahenda juurvõrrand $\sqrt{9+x\sqrt{8x^2+9}}=x+3.\quad V: x_{1,2}=0,\ x_3=3,\ x_4=-1\dfrac{2}{7}.$

5) Lahenda alljärgnev võrrandisüsteem *x*-i ja *y*-i suhtes, kui *a* > -1/2

$$\begin{cases} x-y^2=0 \\ \dfrac{x-y}{a+1}=a \end{cases} \qquad V: \begin{cases} x_1=(a+1)^2 \\ y_1=a+1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2=a^2 \\ y_2=-a \end{cases}.$$

6) Lahenda võrratused

a) $\dfrac{x^2+10x+16}{x-1}>10.\quad V: x>1.$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{x-3}>0 \\ \dfrac{1-4x}{5x-2}\ge 0 \end{cases} \quad V: x\in[0{,}25;0{,}4[$

c) $\dfrac{(2-x)^2(x+5)^3}{x+3}>0 \quad V: x\in]-\infty;-5[\cup]-3;2[\cup]2;\infty[$

7) Lahenda võrrand $x^2+px+35=0$, teades et lahendite ruutude summa on 74.
V: p=12, siis $x_1=-7$ ja $x_2=-5$, p=-12, siis $x_1=5$ ja $x_2=7$.

8) Milliste a väärtuste korral võrrandil $x=1+\dfrac{x+2}{a}$ lahendid puuduvad ? *V: a=0 või a=1.*

9) Lahendage võrrandid.

a) $\dfrac{3(\text{x-11})}{4}=\dfrac{3(x+1)}{5}-\dfrac{2(2x-5)}{11}$

b) $\begin{cases} \text{x}^2+y^2=2(\text{xy+2}) \\ \text{x+y=6} \end{cases}$

c) $\dfrac{\text{2x+2}}{\text{x-3}}-\dfrac{14}{x}=1+\dfrac{4}{x-3}$

V: x = 19; $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 4 \end{cases}$; $x_1 = 7$ ja $x_2 = 6$

10) Kahekohalise arvu numbrite summa on 12. Kui selles arvus numbrid ära vahetada, siis saadakse esialgsest arvust 54 võrra suurem arv. Leia see kahekohaline arv. *V:* 39

11) *Riigieksam 1998 (15p.)* Kirjandit kirjutas 108 õpilast. Neile jagati 480 lehte nii, et iga tütarlaps sai ühe lehe rohkem kui poiss. Tüdrukud said kokku sama palju lehti kui poisid. Kui palju oli poisse ja palju tüdrukuid? *V:* 60 poissi ja 48 tüdrukut.

12) *Riigieksam 2001 (15p.)* Linnadest *A* ja *B* väljusid üheaegselt ühtlase kiirusega teineteisele vastu kaks mootorratturit. Kui üks mootorrattur oli läbinud kolmandiku teest, siis jäi teisel sihtpunktini 20 km. Kui teine mootorrattur oli läbinud kolmandiku teest, siis jäi esimesel sihtpunktini 50 km. Leidke linnade *A* ja *B* vaheline kaugus. *V:* 60 km

13) *Riigieksam 2010 (10p.)* Lahenda võrrandid.

a) $3^{x+2} + 3^{x-2} = 246 \quad V: x = 3$

b) $\cos^2 x - 1 = \sin^2 x - 0{,}5$ vahemikus $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Kontrolli lahendi õigsust.

$V: x = \frac{7\pi}{6}$.

14) *Riigieksam 2012 (10p.)* Lahenda võrratusesüsteem

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2-x} + \frac{1}{2} \ge 0 \\ 2x^2 < (x-1)(1+x) + 2 \end{cases} \qquad V: x \in [0;1[$$

15) *KT2012.* Leia muutuja *x* väärtused, mille korral avaldise $5x^2 - 2x + 9$ väärtus on suurem avaldise $(x+3)^2$ väärtusest. $V:]-\infty;0[\cup]2;\infty[$

16) *KT 2012* Teetööde tõttu oli reisibuss sunnitud sihtkohast 60 km kaugusel peatuma 12 minutit. Et jõuda sihtpunkti ettenähtud ajaks, pidi reisibuss pärast peatumist sõitma plaanitust 15 km/h suurema kiirusega. Leidke reisibussi kiirus pärast peatumist. *V: 75 km/h*

17) *KT 2012.* Lahenda võrratusesüsteem

$$\begin{cases} 12 - 3(2x-5) < 0 \\ 6x - 7 \le 4(x+1) + 3 \end{cases} \qquad V:]4{,}5;7]$$

18) *KT 2013.*

a) Lahenda võrrand $\log_2 2x = 2\log_2 x + \log_2 \frac{x}{2}$. *V: x = 2*

b) Sügavkülmikusse pandud toiduaine temperatuuri y(°C) ajahetkel x(h) kirjeldab valem $y = 32 \cdot 2^{-x} - 16$.

(1) Mis on toiduaine temperatuur külmikusse paneku hetkel *x= 0*?

(2) Mitme tunni pärast on sügavkülmikusse pandud toiduaine temperatuur 0°C? *V: y= 16°C; 1 tund*

19) *KT 2013* Lahenda võrratusesüsteem

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \ge 0 \\ (x-4)^2(x+3) > 0 \end{cases} \qquad V:]-3;-2] \cup [3;4[\cup]4;\infty[$$

20) *KT 2013*

Mobiilioperaator pakub kolme erinevat teenust:

1) kõneteenus, millel on fikseeritud tasu ainult kõnealustuse eest, st tasu ei sõltu kõne pikkusest;

2) fikseeritud tasuga SMS-i saatmise teenus;

3) fikseeritud tasuga MMS-i saatmise teenus.

Aasta kolme esimese kuu kohta sai klient järgmise arve:

Kuu	Kõnede arv	SMS-ide arv	MMS-ide arv	Summa
jaanuar	26	15	5	4,4 €
veebruar	30	0	2	3,3 €
märts	14	5	3	2,2 €

Leidke selle mobiilioperaatori kõnealustustasu ning ühe SMS-i ja MMS-i saatmise hind.

V: Kõnealustustasu 0,1€; SMS saatmise hind 0,07€;MMS saatmise hind 0,15€

21) *Riigieksam 2013 (10p.)* Lahenda

a) võrrand $\log(5+4x)=2\log x \quad V: x=5$

b) võrratus $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{x} < 80$ *V: x > -3*

---

22) *Riigieksam 2014 (10p.)V: 3;4.*

Lahendage võrratusesüsteem

$$\begin{cases} 5-2x < x-|2-5| \\ \frac{3x-3}{6} \le 4-\frac{x+1}{2} \end{cases}$$

ja leidke selle võrratusesüsteemi kõik täisarvulised lahendid.

23) *Riigieksam 2014 (10p.)* Lahenda võrrandid

a) $16^{x+5}=\sqrt{32}$

b) $\log_2(x+5)+\log_2 5=2\log_2(x-5)$ *V: x* = -4,375; *x =15*

24) *Riigieksam 2015 (10p.)*

a) Lahenda võrrand $\log_4(4{,}5-3x)=\log_4 4{,}5-\log_4 3x$

b) On antud funktsioon $f(x)=\log_4(4{,}5-3x)$. Millise parameetri *a* väärtuse korral on võrrandi $2f(x+a)=1$ lahend *x=0,5*? *V:* $x_1=1, x_2=0{,}5; a=\frac{1}{3}$.

25) *Riigieksam 2015 (10p.)*Rajatava ristkülikukujulise liuvälja laius peab olema pikkusest 15 m võrra lühem. Liuvälja ümbermõõt peab olema väiksem kui 120 m ja selle pindala peab olema vähemalt 700 m^2. Arvuta selle liuvälja pikkuse võimalikud täisarvulised väärtused. *V: 35 m või 36 m või 37 m.*

26) *Riigieksam 2015 (10p.)*Väikeses tõlkebüroos töötab 3 inimest: juhataja, tõlk ja toimetaja.

(1) Kui tõsta tõlgi palka 30% ja toimetaja palka 20% võrra, siis oleks nende palkade summa 2400 eurot. Kui aga tõlgi palka tõsta 20% ja toimetaja palka 30% võrra, siis oleks nende palkade summa 2350 eurot. Arvutage tõlgi ja toimetaja palk.

(2) Kõikide töötajate palkade summa on 4000 eurot. Mitu protsenti moodustab juhataja palk tõlgi palgast? *V:* 1200€ ja 700€; 175%.

27) *Riigieksam 2016 (5p.)* Lahenda võrratus

a) $1+\frac{5-x}{x-3} \geq \frac{4x}{x-3}$ *V:* $[0,5;3[$.

b) $\frac{x-3}{4}-\frac{x+2}{3} \leq x+\frac{x-1}{6}$ *V:* $x \geq -1$.

28) *Riigieksam 2016 (5p.)* Lahenda võrrand $\log_2(x+3)+\log_2(x-4)=3\log_2 2$ *V:x=5*

29) *Riigieksam 2016 (10p.)* Allahindlusperioodil oli kõikidel sama nimetusega toodetel ühesugune hind. Mari ostis jope, 2 kampsunit ja 3 särki ning maksis kokku 100 eurot. Peeter ostis 3 jopet, särgi ja 5 kampsunit ning maksis 186 eurot. Jüri ostis 3 jopet ja maksis 84 eurot.

1. Kui palju maksis Piret särgi ja kahe kampsuni eest kokku?
2. Arvutage jope esialgne hind, kui allahindlus oli 60%. *V:* 48€; 70€.

30) *Riigieksam 2017 K(5p.)* Lahenda võrratus $x(x+1)<4(1+x)$. *V:* $x \in (-1;4)$

31) *Riigieksam 2017 L(5p.)* Lahenda võrrand $2^x(2^{x+1}-5\cdot 2^x+96)=0$ *V:* $x=5$

32) *Riigieksam 2017 L(10p.)*

a) Lahenda võrratus $\frac{x^2(x-4)}{x+2} \leq 0$.

b) Kas võrrandil $2\log_3(x+2)=2+\log_3 4$ on lahendeid, mis kuuluvad alaülesandes 1antud võrratuse lahendipiirkonda? Põhjenda oma vastust.*V:*. $x \in (-2;\ 4]$ Võrratuse lahendite piirkonda kuulub $x=4$.

33) *Riigieksam 2017 K(10p.)* Kauplusesse toodi kahte sorti jäätiseid, mis olid pakitud kolme kasti. Esimeses kastis oli 60 pulgajäätist ja teises kastis oli 40 vahvlijäätist. Esimeses kastis olevad jäätised kaalusid kokku sama palju kui teises kastis olevad jäätised. Kolmandas kastis oli 35 pulgajäätist ja 15 vahvlijäätist ning need kokku kaalusid 200 g vähem kui esimese kasti jäätised.

a) Kui palju kaalus üks pulgajäätis ja kui palju kaalus üks vahvlijäätis?

b) Kauplus tellis 15 kg jäätist. Kas kauplusesse toodud jäätisekogus vastas tellimusele? Põhjendage oma vastust.

Pulgajäätis maksis 59 senti ja vahvlijäätis 49 senti. Mitu eurot maksid kolme kasti jäätised kokku? *V:* 1. Pulgajäätis 80 g, vahvlijäätis 120 g. 2. Ei, sest jäätist toodi tellitust 800 g vähem. 3. 83 eurot.

34) *Riigieksam 2018 L(5p.)*Lahenda võrrand $\log(36-x^3)-\log 6=2+\log\frac{1}{6}$ *V:-4*

35) *Riigieksam 2018 L(5p.)*Tallinnast Narva on mööda maanteed 210 km. Peetril kulus sõiduks Tallinnast Narva ja tagasi kokku 5 tundi, kusjuures tagasiteel oli tema auto keskmine kiirus 20% võrra suurem. Leia Peetri auto keskmine kiirus Tallinnast Narva sõites. *V:* 77 km/h

36) *Riigieksam 2018 K(5p.)*Lahenda võrrand $\frac{x-1}{x-3}+x=\frac{2}{x-3}$ *V:-1*

37) *Riigieksam 2018 K(5p.)*

a) Lahenda võrratus $x+4 \geq 3{,}75+\dfrac{3x}{4}$.

b) Kas arv $A=\sin^2\dfrac{\pi}{4}+\cos\pi$ kuulub punktis a) antud võrratuse lahendite piirkonda? Põhjenda oma vastest. *V:x >-1; jah.*

38) *Riigieksam 2018 K(10p.)*Lihtsusta avaldis $\dfrac{9x^2-y^2}{12x-4y}-\dfrac{3x-y}{12}$ ja arvuta selle väärtus, kui x ja y on vastavalt võrrandite $8^x=16$ ja $\log_2(y+8)=8-\log_2 16$ lahendid.

V: $\dfrac{3x+2y}{6};\ 3\dfrac{1}{3}$

39) *Riigieksam 2019 K(5p.)*Lahendage võrratus $\dfrac{5x-6}{4}-2x\leq\dfrac{2}{3}$. Leidke selle võrratuse kõige väiksem täisarvuline lahend. *V:x =-2*

40) *Riigieksam 2019 K(10p.)* Leidke järgmiste võrrandite täpsed lahendid:

a) $2^{9a-3}=32$

b) $\log(24b)+\log 5=2$

c) $\left(\dfrac{2}{7c}\right)^{-1}=\sqrt{3^{11}:3^9}$

Järjestage saadud lahendid, alustades kõige väiksemast. $V:\dfrac{5}{6};\dfrac{6}{7};\dfrac{8}{9}$

41) *Riigieksam 2019 L(10p.)* Lahendage võrratusesüsteem

$$\begin{cases}(3x-4)(x-2)\leq x+2\\ \dfrac{3x-4}{x-2}<x+2\end{cases}\qquad V:\ \left[\dfrac{2}{3};2\right[$$

42) *Riigieksam 2020 L(10p.)*

Aprillis oli aianduskaupluses õuna- ja pirnipuude istikute eripakkumine: vähemalt 10 õunapuuistiku ostmisel oli ühe istiku hind 20% võrra tavahinnast madalam ja vähemalt 10 pirnipuuistiku ostmisel oli ühe istiku hind $\frac{1}{4}$ võrra tavahinnast madalam. Ühe pirnipuuistiku tavahind oli 3 euro võrra kallim kui kirsipuuistiku hind.

1. Urmas ostis 15 õunapuuistikut, 3 pirnipuuistikut ja 4 kirsipuuistikut ning maksis kokku 392 eurot. Margus ostis 8 õunapuuistikut, 16 pirnipuuistikut ja 2 kirsipuuistikut ning maksis kokku 450 eurot. Arvutage ühe õuna-, pirni- ja kirsipuuistiku tavahind.

2. Kui palju oleks kogu kaup maksnud siis, kui Urmas ja Margus oleksid teinud ühise ostu?

Vastus: Tavahinnaga õunapuuistik maksis 22 eurot, pirnipuuistik 20 eurot ja kirsipuuistik 17 eurot; Ühise ostu korral oleks summa olnud 791 eurot ja 80 senti.

43) *Riigieksam 2020 L(10p.)*

Lahenda võrratuste süsteem

$$\begin{cases}x+\dfrac{4}{3}>\dfrac{4}{3x}\\ x-\dfrac{4}{3}\leq\dfrac{3x}{4}\end{cases}\quad \text{Vastus: } x\in\left]-2;0\right[\cup\left]\dfrac{2}{3};5\dfrac{1}{3}\right]$$

44) *Riigieksam 2020 L(10p.)*
Kui firma kulutab teadusuuringuteks x miljonit eurot, siis selle firma puhaskasum on $k(x)$ miljonit eurot, kus $k(x) = 9 + 5\log_2(x+1) - x$.
1. Kui suur on selle firma puhaskasum, kui teadusuuringutele ei kulutata ühtegi eurot?
2. Kas firma puhaskasum on suurem siis, kui ta kulutab teadusuuringuteks 7 miljonit eurot, või siis, kui ta kulutab 15 miljonit eurot? Põhjendage oma vastust.
3. Kui firma suurendaks teadusuuringuteks esialgu planeeritud summat x miljonit eurot nelja miljoni euro võrra, siis kasvaks puhaskasum $k(x)$ miljonit eurot ühe miljoni euro võrra. Kui suure summa planeeris firma esialgu teadusuuringuteks kulutada?
Vastus: Puhaskasum on 9 miljonit eurot; Puhaskasum on suurem siis, kui teadusuuringuteks kulutada 7 miljonit eurot; Firma planeeris teadusuuringuteks esialgu 3 miljonit eurot.
45) *Riigieksam 2020 K(5p.)*
On antud võrdus $a + 6 = \frac{2b+4a}{3}$.
1. Avaldage arv b arvu a kaudu.
2. Leidke arvu a kõik väärtused, mille korral arv $b < 7$.
Vastus: $b = \dfrac{18-a}{2}; a \in \left]4;\infty\right[$
46) *Riigieksam 2020 K(10p.)*
Sõbrad Mart ja Robert osalesid kohaliku duatloni põhidistantsil, kus tuli läbida 6 km joostes, 24 km jalgrattaga sõites ja veel 3 km joostes.

1. Mart läbis esimese jooksuetapi poole tunniga. Tema keskmine kiirus teisel jooksuetapil oli 3 km/h võrra väiksem kui esimesel jooksuetapil. Mitu minutit kulus Mardil teise jooksuetapi läbimiseks?
2. Robert sõitis jalgrattaga ühes tunnis 2 km rohkem kui Mart ning läbis selle etapi 3 minutit kiiremini kui Mart. Arvutage Roberti keskmine kiirus jalgrattaetapil.

Vastus: Teise jooksuetapi läbimiseks kulus Mardil 20 minutit; Roberti keskmine kiirus jalgrattaetapil oli 32 km/h.