

**KORDAMINE RIIGIEKSAMIKS X**  
**KUJUNDI PINDALA (RUUMALA) LEIDMINE INTEGRAALI ABIL**

1) Esmalt tuleta meelde olulisemad **integreerimisvalemid ja reeglid**.

$\int 0 dx = C$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

2) Summa (vahe) integraal võrdub liidetvate integraalide summaga (vahega)

$$\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

3) Konstantse teguri võib tuua integraali märgi alt integraali ette.

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

4) **Newton-Leibnizi valem määratud integraali arvutamiseks**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ kus } F'(x) = f(x)$$

$$\text{ehk } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

5) **Määratud integraali  $\int_a^b f(x) dx$  arvutamiseks**

a) leitakse integreeritava funktsiooni algfunktsioon;

b) leitakse algfunktsiooni väärtused ülemise ja alumise raja kohal;

c) lahutatakse algfunktsiooni väärtusest ülemise raja kohal algfunktsiooni väärtus alumise raja kohal.

6) Kui kõvertrapetsi kõverhaar on funktsiooni  $y = f(x)$  graafikul ja laused on võetud kohtadel a ja b, siis selle **kõvertrapetsi pindala avaldub valemiga**  $S = F(b) - F(a)$ , kus  $F'(x) = f(x)$ .

7) Lisaks eelpool toodud omadustele on kasulik meeles pidada ka järgmisi omadusi:

a) Kui vahetada integraali rajad, siis muutub integraali märk vastupidiseks.

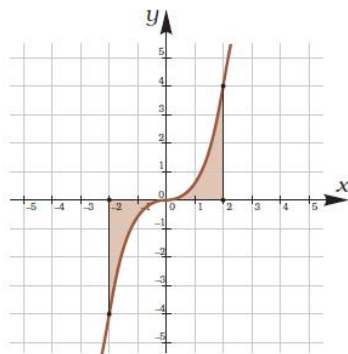
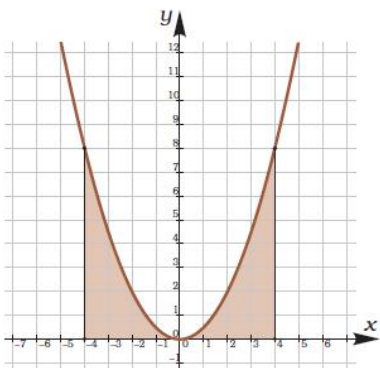
$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

b) Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev lõigul  $[a; b]$ , siis

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

c) Kui funktsioon  $f(x)$  on paarisfunktsioon, siis  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

d) Kui funktsioon  $f(x)$  on paaritu funktsioon, siis  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

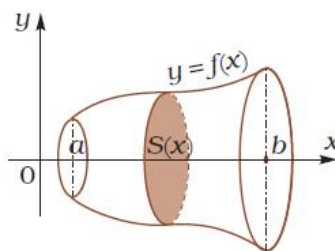


e) Kui kõvertrapets asub allpool  $x$ -telge, siis saad kõvertrapetsi pindalaks tema vastandaru.

f) Kui kujundit piiravad kaks joont, siis saame otsitava pindala kahe kõvertrapetsi pindalade vahena.

8) Kui pöörkeha piiravad tasandid  $x=a$  ja  $x=b$  ( $a < b$ ) ning pind, mis tekib lõigus  $[a; b]$  integreeruva funktsiooni  $f(x)$  graafiku pöörlemisel ümber  $x$ -telje, siis avaldub

**ruumala valemiga**  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .



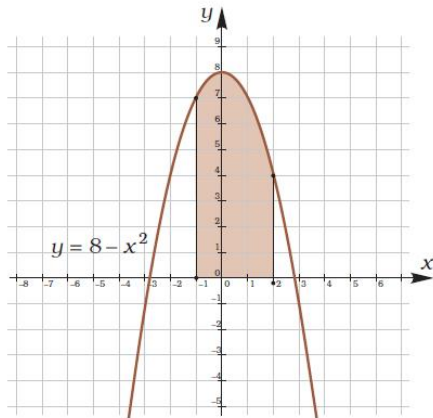
## NÄITEÜLESANDED

1) Leia  $\int_{-1}^2 (8 - x^2) dx$ .

Integreeritava funktsiooni algfunktsioon on  $8x - \frac{x^3}{3}$ .

Rakendades Newton-Leibnizi valemit saame

$$\int_{-1}^2 (8 - x^2) dx = \left( 8x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \left( 8 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left( 8 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 13\frac{1}{3} - \left( -7\frac{2}{3} \right) = 21$$



Kõvertrapetsi pindala on 21 ü<sup>2</sup>.

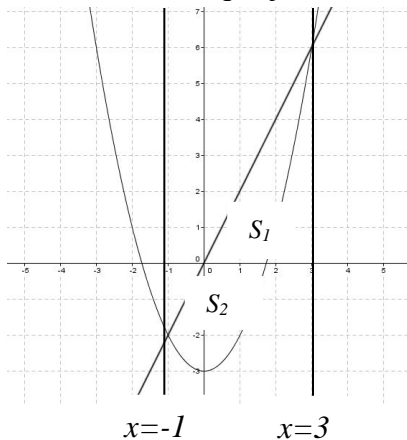
2) Leia funktsioonide  $y = x^2 - 3$  ja  $y = 2x$  graafikutega piiratud kujundi pindala.

*Lahendus.*

Leiame esmalt graafikute lõikepunktide abstsissid (integreerimisrajad).

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{cases} \text{ ehk } x^2 - 3 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Viete'i teoreemi põhjal leiame lahendid  $x_1 = -1, x_2 = 3$ .

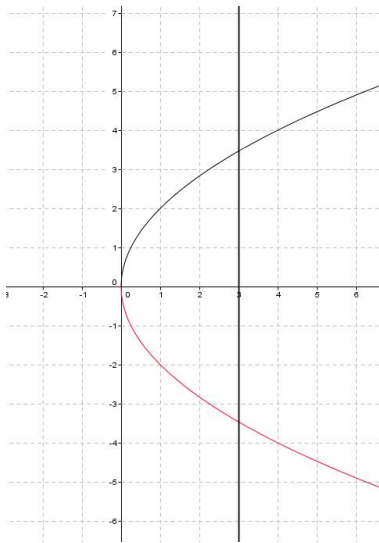


Seega

$$\int_{-1}^3 S_1 - S_2 = \int_{-1}^3 [2x - (x_2 - 3)] dx = \int_{-1}^3 (2x - x^2 + 3) dx = \left( x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x \right) \Big|_{-1}^3 = 9 - \frac{27}{3} + 9 - \left( 1 + \frac{1}{3} - 3 \right) = 10 \frac{2}{3} (\text{ü}^2)$$

Vastus. Kujundi pindala on  $10 \frac{2}{3} \text{ü}^2$ .

- 3) Vaatame kujundit, mis tekib joone  $y = 2\sqrt{x}$  pöörlemisel ümber x- telje. Tekkinud nõ kausi sügavuseks on 3 üh. Leia „kausi“ ruumala.



Lahendus.

$$V = \pi \int_0^3 (2\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^3 4x dx = \pi \cdot 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \pi \cdot 2x^2 \Big|_0^3 = 18\pi (\text{ü}^3)$$

Vastus. Pöördkeha ruumala on  $18\pi \text{ü}^3$ .

- 4) Riigieksam 2001 Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides A( 1; 1), B(3; 1), C(4;4).  
 a. Küljeks BC on parabooli  $y = -x^2 + ax - 20$ kaar. Leia kordaja a väärtus.  
 b. Punktid  $A_1$  ja  $C_1$  on vastavalt punktide A ja C projektsioonid. Arvuta trapetsi  $A_1C_1CA$  pindala.  
 c. Arvuta kujundi ABC pindala

Lahendus.

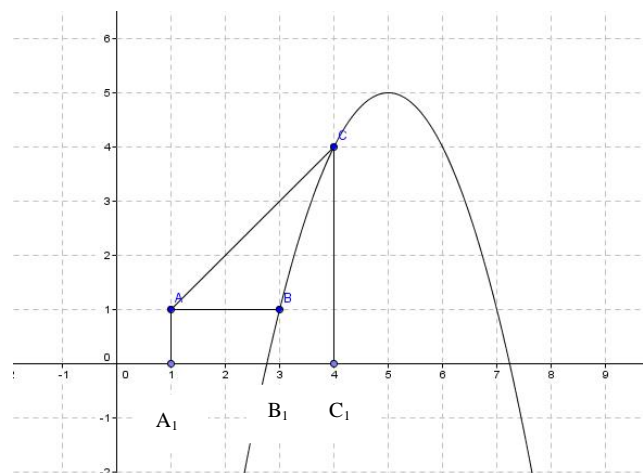
- a) Kuna punktid B ja C asuvad paraboolil, siis valides ühe nendest punktidest (näiteks C) ja pannes parabooli võrrandisse, saame

$$4 = -16 + 4a - 20$$

$$a = 10$$

- b) Trapetsi  $A_1C_1CA$  alused on  $AA_1 = 1$  üh,  $C_1C = 4$  üh ning kõrgus  $A_1C_1 = 3$  üh.

$$\text{Trapetsi pindala on } S = \frac{1+4}{2} \cdot 3 = 7,5 (\text{üh}^2).$$



- c) Kujundi ABC pindala arvutamiseks lahutame trapetsi  $A_1C_1CA$  pindalast ristküliku  $AA_1B_1B$  ja kõvertrapetsi  $B_1C_1CB$  pindala.  
 Ristküliku  $AA_1B_1B$  pindala  $S=1 \cdot 2=2$  (üh<sup>2</sup>).  
 Kõvertrapetsi  $B_1C_1CB$  pindala

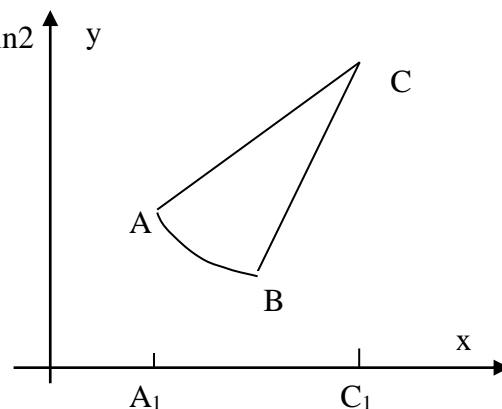
$$S = \int_3^4 (-x^2 + 10x - 20) dx = \left( -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 20x \right) \Big|_3^4 = -\frac{64}{3} + 5 \cdot 16 - 80 + \frac{27}{3} - 5 \cdot 9 + 60 = 2\frac{2}{3} (\text{üh}^2)$$

Kujundi ABC pindala  $S = 7,5 - 2 - 2\frac{2}{3} = 2\frac{5}{6} (\text{üh}^2)$ .

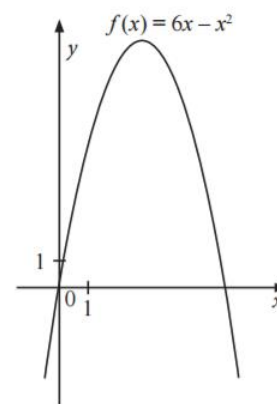
## ÜLESANDED

- Leia kujundi pindala, mis on piiratud funktsiooni  $y = -x^2 + 4x - 4$  graafiku ja koordinaattelgedega. **V:**  $2\frac{2}{3} \text{üh}^2$
- Leia joontega  $y = 2(x-1)(3-x)$  ja  $y = 2(x-1)^2$  piiratud kujundi pindala. Tee joonis.  
**V:**  $\frac{2}{3} \text{ü}^2$ .
- Leia integraalid.
  - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x) dx$  **V:** 5
  - $\int \frac{2x + 3x^2}{3x} dx$  **V:**  $\frac{2}{3}x + \frac{x^2}{2} + c$
- Kaardil oli märgitud pinnatükk, mida piiravad jooned  $y = 3x^2 + 3x$  ja  $y = x^2 + 2x + 1$ . Võrdle selle pinnatüki osi, mis jäävad vastavalt ülespoole ja allapoole  $x$ -telge. Kumb neist on suurem ja mitmeme protsendi võrra? Skitseeri joonis. **V:** *ülemine ja 125%*.
- Riigiksam 1997.* Arvuta joontega  $y = -x^2 - 2x + 3$  ja  $y = -5$  piiratud kujundi pindala. Tee joonis. **V:**  $36\text{ü}^2$ .
- Riigiksam 1998.* On antud jooned  $y = \sin x$  ja  $y = \cos x$ 
  - Milliste  $x$ -i väärtuste korral lõigust  $\left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$  on nende joonte puutujad paralleelsed? **V:**  $x = -\frac{\pi}{4}$
  - Leia sirgetega  $x=0$  ja  $x=\frac{\pi}{2}$  ning antud joontega piiratud kujundi pindala.  
**V:**  $2\sqrt{2} - 2$
- Riigiksam 1998.* Kujund on piiratud joontega  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  ja  $x = \ln 3$ 
  - Arvuta kujundi pindala. Tee joonis. **V:**  $2\text{üh}^2$
  - Leia  $x$ -telje punkt  $a$ , mida läbiv vertikaalsirge poolitab antud kujundi pindala.  
**V:**  $a = \ln 2$

- 8) Leia pöörkkeha ruumala, mis tekib, kui x-telje ümber pöörleb joontega  $2x - 3y + 6 = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$  ja  $y = 0$  piiratud kujund. **V:**  $V = 17\frac{2}{3}$  üh<sup>3</sup>
- 9) Riigieksam 2000. Kujund on piiratud joontega  $y = -x^2$ ,  $y = 4x + 4$  ja  $y = -4x + 4$ . Arvuta kujundi pindala. Tee joonis. **V:**  $5\frac{1}{3}$  üh<sup>2</sup>
- 10) Riigieksam 2000. Kujund on piiratud joontega  $y = x^2$ ,  $y = 4x - 4$  ja  $y = -4x - 4$ . Arvuta kujundi pindala. Tee joonis. **V:**  $5\frac{1}{3}$  üh<sup>2</sup>
- 11) Riigieksam 2001. Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides A(0,5; 2), B(1; 1), C(3,3).
- Küljeks AB on hüperbooli  $xy = a$  kaar, Leia kordaja a väärtus.
  - Punktid A<sub>1</sub> ja C<sub>1</sub> on vastavalt punktide A ja C projektsioonid. Arvuta trapetsi A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>CA pindala.
  - Arvuta kujundi ABC pindala **V:**  $a = 1; 6,25; 2,25 - \ln 2$



- 12) Riigieksam 2001. Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides A(1; 1), B(2; 0,5), C(3,3).
- Küljeks AB on hüperbooli  $xy = a$  kaar, Leia kordaja a väärtus.
  - Punktid A<sub>1</sub> ja C<sub>1</sub> on vastavalt punktide A ja C projektsioonid. Arvuta trapetsi A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>CA pindala.
  - Arvuta kujundi ABC pindala **V:**  $a = 1; 4; 2,25 - \ln 2$
- 13) Riigieksam 2014 Joonisel on funktsioonide  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$  ja  $g(x) = 5 - x$  graafikud.
- Viiruta antud joontega piiratud kujund.
  - Arvuta selle viirutatud kujundi pindala. **V:**  $4,5$  ü<sup>2</sup>
- 14) Riigieksam 2016 Joonisel on ruutfunktsiooni  $f(x) = 6x - x^2$  graafik.
- Arvutage selle ruutfunktsiooni nullkohad ja graafiku haripunkti koordinaadid.
  - Viirutage kujund, mida piiravad antud funktsiooni graafik ja x-telg ning arvutage selle kujundi pindala.
- V:**  $X_0 = \{0; 6\}; H(3; 9); 36$  ü<sup>2</sup>.

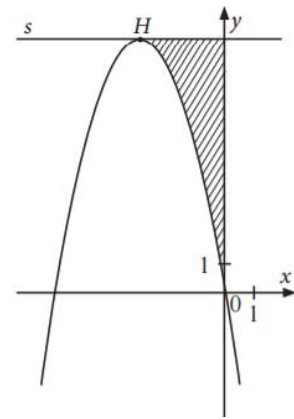


15) Riigieksam 2016 Joonisel on ruutfunktsiooni  $f(x) = ax^2 + bx$  graafik ja  $x$ -teljega paralleelne sirge  $s$ , mis läbib funktsiooni  $f(x)$  graafiku haripunkti  $H(-3; 9)$ .

1. Arvutage kordajate  $a$  ja  $b$  väärtused ning leidke sirge  $s$  võrrand.

2. Arvutage viirutatud kujundi pindala.

V:  $f(x) = -x^2 - 6x$ ;  $y = 9; 9 \text{ ü}^2$ .



16) Riigieksam 2017L

1. Kõvertrapetsit  $K$  piiravad jooned  $y = x^2 - 4x + 6$ ;  $y = 1$ ;  $x = 1$  ja  $x = 4$ . Joonestage ja viirutage kõvertrapets  $K$ .

2. Arvutage kõvertrapetsi  $K$  pindala. V:  $6 \text{ ü}^2$

17) Riigieksam 2017K V:  $9 \text{ ü}^2$ ; saab

**Ülesanne 3.** (10 punkti)

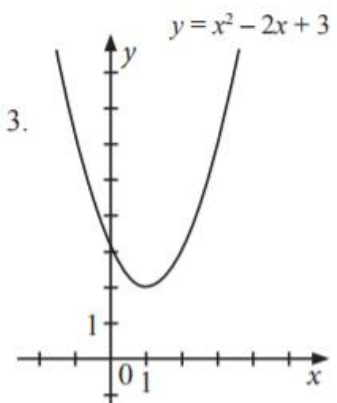
Joonisel on ruutfunktsiooni  $y = x^2 - 2x + 3$  graafik.

Kõvertrapetsit  $K$  piiravad jooned  $y = x^2 - 2x + 3$ ;  $y = 0$ ;  $x = 0$  ja  $x = 3$ .

1. Joonestage ja viirutage kõvertrapets  $K$ .

2. Arvutage kõvertrapetsi  $K$  pindala.

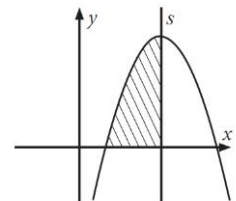
3. Kas kõvertrapetsist  $K$  saab välja lõigata ristküliku, mille pindala on 6 pindalaühikut? Põhjendage oma vastust.



18) Riigieksam 2018K Joonisel on ruutfunktsiooni  $y = 6x - x^2 - 5$  graafik ja  $y$ -teljega paralleelne sirge  $s$ , mis läbib parabooli haripunkti.

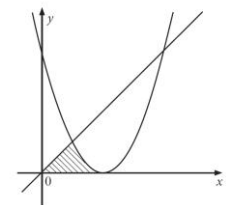
1. Koostage sirge  $s$  võrrand.

2. Arvutage viirutatud kujundi pindala. V:  $x = 3; 5 \frac{1}{3} \text{ ü}^2$



19) Riigieksam 2018L Joonisel on sirge  $y = x$  ja parabool  $y = x^2 - 4x + 4$ .

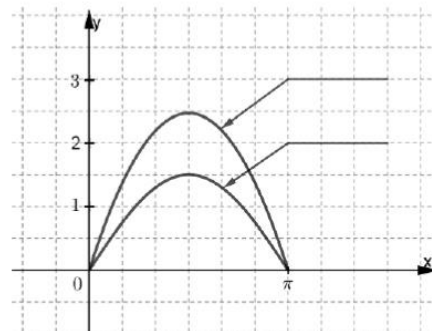
Arvutage joonisel viirutatud kujundi pindala. V:  $\frac{5}{6} \text{ ü}^2$



20) Riigieksam 2018L Joonisel on funktsioonide  $f(x)=1,5\sin x$  ja  $g(x)=\pi x-x^2$  graafikud lõigul  $[0; \pi]$ .

1. Leidke joonise abil, kumma funktsiooni väärtused on vahemikus  $(0; \pi)$  suuremad. Märkige joonisele nende funktsioonide valemid.

2. Arvutage integraal  $\int_0^{\pi} 1,5\sin x dx$ . Viirutage joonisel kujund, mille pindala selle integraali abil leidsite. V:3 ü<sup>2</sup>



21) Riigieksam 2018K Joonisel on funktsiooni  $f(x)=-x^2+4x$  graafik (vt joonist).

1. Arvutage punktide  $A$ ,  $B$  ja  $C$  koordinaadid, kui punkt  $C$  on parabooli haripunkt ning punktid  $A$  ja  $B$  on funktsiooni  $f(x)$  graafiku lõikepunktid  $x$ -teljega.

2. Joonestage kolmnurk  $ABC$  ja arvutage selle kolmnurga pindala.

3. Kõvertrapetsit piiravad  $x$ -telg ja funktsiooni  $f(x)$  graafik. Arvutage kõvertrapetsi pindala.

4. Mitme protsendi võrra on kolmnurga  $ABC$  pindala kõvertrapetsi pindalast väiksem?

V:  $A(0;0)$ ,  $B(4;0)$ ,  $C(2;4)$ ;  $8\text{ü}^2$ ;  $10\frac{2}{3}\text{ü}^2$ ; 25%

