

HARJUTUSÜLESANDED lk.61

1. Leia kolmnurga pindala, kui

a) $a = 15 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$ ja $c = 25 \text{ cm}$

Leiame kolmnurga pindala kasutades selleks Heroni valemit.

$$\text{Pool übermõõtu } p = \frac{15 + 18 + 25}{2} = 29.$$

$$\text{Kolmnurga pindala } S = \sqrt{29 \cdot (29 - 15) \cdot (29 - 18) \cdot (29 - 25)} \approx 134 \text{ (üh}^2\text{)}.$$

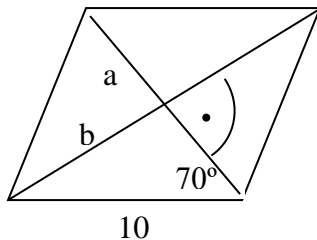
b) $a = 50 \text{ m}$, $\beta = 100^\circ$ ja $\gamma = 25^\circ 20'$

$$\text{Kasutame valemit } S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}.$$

$$\text{Leiame nurga } \alpha = 180^\circ - 100^\circ - 25^\circ 20' = 54^\circ 40'.$$

$$\text{Pindala } S = \frac{50^2 \sin 100^\circ \sin 25^\circ 20'}{2 \sin 54^\circ 40'} \approx 646 \text{ (üh}^2\text{)}.$$

2. Rombi külje pikkus on 10 cm ja nürinurk 140° . Leia diagonaalide pikkused.



Rombi diagonaalid poolitavad teineteist ja on üksteisega risti ning samuti poolitavad diagonaalid rombi nurkasid. Saame täisnurksest kolmnurgast seosest

$$\sin 70^\circ = \frac{b}{10}, \text{ millest } b = \sin 70^\circ \cdot 10 \approx 9,4 \text{ (üh) rombi pikema diagonaali}$$

$$d_1 = 2 \cdot 9,4 = 18,8 \text{ (üh)}. \text{ Teise diagonaali saame seosest } \cos 70^\circ = \frac{a}{10}, \text{ millest}$$

$$a = \cos 70^\circ \cdot 10 \approx 3,4 \text{ (üh) ja lühem diagonaal on seega } d_2 = 2 \cdot 3,4 = 6,8 \text{ (üh)}.$$

3. Kolmnurga ABC pindala on 50 üh². Leia külge BC, kui $\angle B = 30^\circ$ ja $AB = 10$ üh.

$$\text{Puuduva külje leiame valemist } S = \frac{ab \sin \gamma}{2}, \text{ millest}$$

$$BC = \frac{2S}{AB \cdot \sin 30^\circ} = \frac{2 \cdot 50}{10 \cdot 0,5} = 20 \text{ (üh)}.$$

4. Lahenda kolmnurk ja leia pindala.

a) $b = 4,5 \text{ m}$, $c = 10 \text{ m}$ ja $a = 2,5 \text{ m}$

Kolmnurk eksisteerib juhul, kui iga kahe külje summa on suurem, kui kolmas külge. Siin aga $4,5 + 2,5 < 10$ ja sellist kolmnurka järelikult ei ole.

b) $a = 60 \text{ cm}$, $\alpha = 70^\circ 24'$ ja $\gamma = 40^\circ$

$$\text{Leiame esmalt nurga } \beta = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ 24' = 69^\circ 36'.$$

Puuduvad küljed saame siinusteoreemi abil seostest

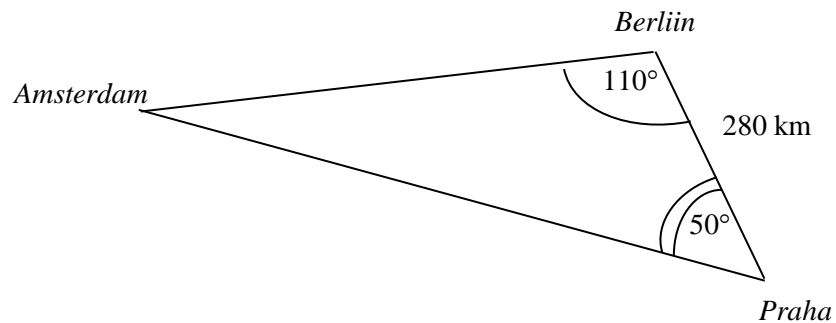
$$\frac{60}{\sin 70^\circ 24'} = \frac{b}{\sin 69^\circ 36'} = \frac{c}{\sin 40^\circ}.$$

Leiame $b = \frac{60 \cdot \sin 69^{\circ}36'}{\sin 70^{\circ}24'} \approx 59,7(\text{cm})$ ja $c = \frac{60 \cdot \sin 40^{\circ}}{\sin 70^{\circ}24'} \approx 40,9(\text{cm})$.

Kolmnurga pindala leidmiseks kasutame valemit $S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$, millest pindala $S \approx 1151(\text{cm}^2)$.

5. RE2003(10p.)

a) Amsterdam - Berliin - Praha moodustavad kolmnurga (vt. joonist), mille kaks nurka on 50° ja 110° . Kui kaugel on Amsterdam Berliinist ja Praha Amsterdamist? Vastused anna täpsusega 10 km.



Tähistame kolmnurga tipud ja nurgad A- Amsterdam, P- Praha ja B- Berliin.

Siis $\angle B = 110^{\circ}$ ja $\angle P = 50^{\circ}$.

Küsitud suuruste leidmiseks kasutame siinusteoreemi.

Leiame esmalt nurga A suuruse, teades, et kolmnurga nurkade summa on 180° .

$$\angle A = 180^{\circ} - (50^{\circ} + 110^{\circ}) = 20^{\circ}.$$

Siinusteoreemi põhjal

$$\frac{280}{\sin 20^{\circ}} = \frac{AB}{\sin 50^{\circ}} = \frac{AP}{\sin 110^{\circ}}$$

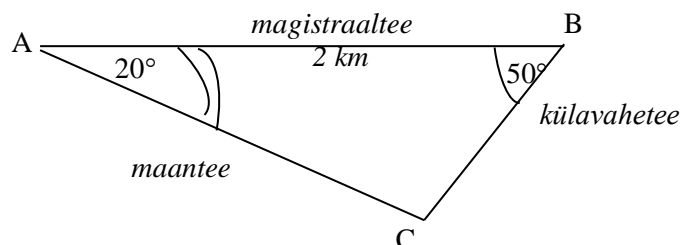
Leiame

$$AB = \frac{280 \cdot \sin 50^{\circ}}{\sin 20^{\circ}} \approx 630$$

$$AP = \frac{280 \cdot \sin 110^{\circ}}{\sin 20^{\circ}} \approx 770$$

Vastus. Amsterdami ja Berliini vahemaa on ligikaudu 630 km ning Praha ja Amsterdami vahemaa ligikaudu 770 km.

b) Kolm teed – magistraaltee, maantee ja külavahetee moodustavad kolmnurga ABC , milles $\angle A = 20^{\circ}$ $\angle B = 50^{\circ}$ ja $AB = 2$ km (vt joonist). Kui pikk on teelõik AC ? Kell 12.00 pööras liikluseeskirjade rikkuja punktis A magistraalteelt maanteele ja jätkas sõitu kiirusega 140 km/h ristmiku C suunas. Samal ajal (kell 12.00) alustas punktist B sõitu mööda külavahetee ristmiku C suunas politseiinspektor, kes jõudis kohale 35 sekundiga. Kas politseiinspektor jõudis ristmikule C enne liikluseeskirjade rikkujat? Põhjenduseks esitage arvutused.



Leiame esmalt nurga $\angle C = 180^\circ - (20^\circ + 50^\circ) = 110^\circ$.

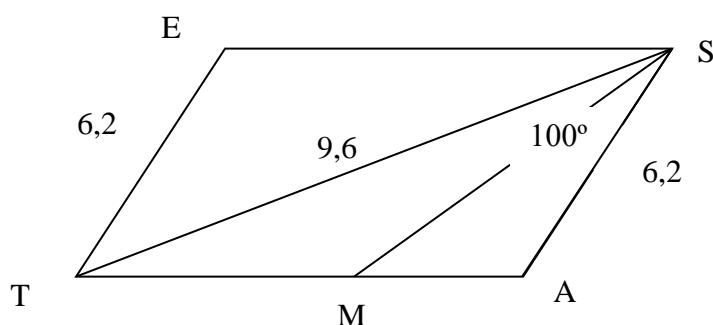
Lõigu AC leiame siinusteoreemi abil seosest $\frac{AC}{\sin 50^\circ} = \frac{2}{\sin 110^\circ}$, millest

$$AC = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 1,63(\text{km}).$$

Liikluseeskirjade rikkujal kulus aega $\frac{1,63 \cdot 3600}{140} \approx 42(\text{s})$, st. politsei jõudis ristmikule ennem.

6. Rööpkülikus TASE on $TS = 9,6$ cm, $TE = 6,2$ cm ja $\angle TSA = 100^\circ$.

- Märgi andmed joonisele;
- Arvuta rööpküliku TASE übermõõt ja pindala;
- $\angle TSA$ poolitaja lõikab külge TA punktis M. Leia lõigu TM pikkus.



Rööpküliku TASE pindala $S = 9,6 \cdot 6,2 \cdot \sin 100^\circ \approx 58,6(\text{cm}^2)$.

Übermõõdu jaoks leiame koosinusteoreemi abil külge TA pikkuse.

$$TA = \sqrt{9,6^2 + 6,2^2 - 2 \cdot 9,6 \cdot 6,2 \cdot \cos 100^\circ} \approx 12,3(\text{cm}).$$

Übermõõt $P = 2(12,3 + 6,2) = 37(\text{cm})$.

Lõigu TM pikkuse leidmiseks leiame esmalt nurkade STM ja TMS suurused.

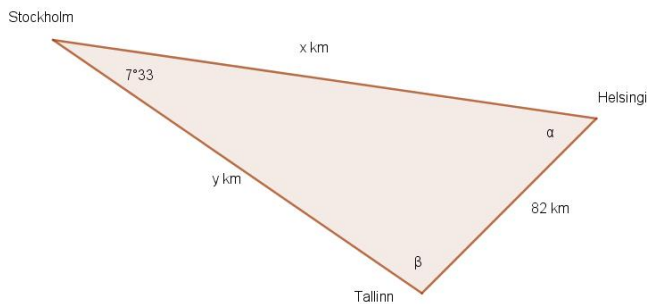
Kasutades siinusteoreemi saame $\frac{6,2}{\sin \angle STM} = \frac{12,3}{\sin 100^\circ} \Rightarrow \angle STM = 29^\circ 46'$.

Kolmnurgast TMS leiame $\angle TMS = 180^\circ - 29^\circ 46' - 50^\circ = 100^\circ 14'$. Kasutades siinusteoreemi saame

$$\frac{9,6}{\sin 100^\circ 14'} = \frac{TM}{\sin 50^\circ} \Rightarrow TM \approx 7,5(\text{cm}).$$

7. Tallinnast väljuval helikopteril on kaks sihtkohta: Stockholm ja Helsingi.

Tallinnaga samal laiuskraadil olevasse Stockholmi lennates on kopteri kiirus 12 km/h väiksem kui Helsingisse lennates. Tallinnast kirdes asuvasse Helsingisse lennates läbib kopter 82 kilomeetrit 30 minutiga. Kui kaugel asuvad Helsingi ja Stockholm teineteisest linnulennul, kui on teada, et nurk Tallinna-Stockholmi ja Stockholmi-Helsingi teelõikude vahel on $7^\circ 33''$ ning helikopter lendab Stockholmi 2 tundi kauem kui Helsingisse?



Kanname andmed joonisele. Tallinn-Helsingi läbimiseks kulus 30 min, st kiirus oli $2 \cdot 82 = 164$ (km/h). Siis Tallinn Stockholmi kiirus on $164 - 12 = 152$ (km/h) ja aega kulus $2 + 0,5 = 2,5$ (h). Leiame Tallinn Stockholmi vahelise kauguse $y = 2,5 \cdot 152 = 380$ (km).

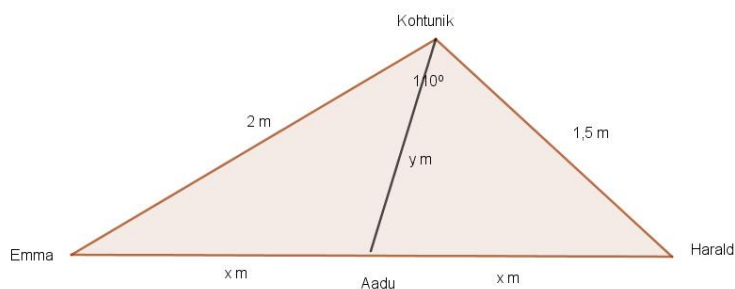
Kasutame siinusteoreemi $\frac{82}{\sin 7^\circ 33'} = \frac{380}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin \beta}$

Leiame esmalt nurga $\alpha = 37^\circ 31'$. Nurga $\beta = 180^\circ - 7^\circ 33' - \alpha = 134^\circ 56'$.

Nüüd same siinusteoreemi avaldisest leida ka otsitava lõigu $x \approx 442$ (km).

Vastus. Linnulennul on Stockholmi ja Helsingi vaheline kaugus ligikaudu 442 km.

8. Kassinäitusel asus kohtunik kahest väljavalitud tublimast kodukassist 1,5 m ja 2 m kaugusel. Kassiomaniik Aadu märkas, et nii tekkis kolmnurk, kus kohtuniku ja kasside vahele jäi nurk suurusega ligikaudu 110° . Aadu asus täpselt kahe kassi vahel. Kui kaugel olid kassid teineteisest ja kui kaugel asus Aadu kohtunikust?



Kanname esmalt andmed joonisele. Kuna Aadu on mõlemast kassist samal kaugusel, siis same kasside vahelise kauguse $2x$ m. Leiame selle koosinusteoreemi abil

$$2x = \sqrt{2^2 + 1,5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot \cos 110^\circ} \approx 2,9(m)$$

Kohtuniku ja Aadu vaheline kaugus on tekkinud kolmnurga mediaaniks.

Ilmselt kõige lihtsam on kasutada mediaani valemit $m = \sqrt{\frac{2^2 + 1,5^2}{2} - \frac{(2x)^2}{4}} \approx 1(m)$

Võib ka leida näiteks nurga H (Harald) suurus koosinusteoreemi abil

$$\cos H = \frac{(2x)^2 + 1,5^2 - 2^2}{2 \cdot (2x) \cdot 1,5} \Rightarrow \angle H \approx 40^\circ 43' \text{ ja seejärel koosinusteoreemiga mediaan}$$

$$y = \sqrt{1,5^2 + x^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot x \cdot \cos H} \approx 1(m).$$

Vastus: Emma ja Harald on teineteisest ligikaudu 2,9 m kaugusel ja Aadu kohtunikust 1 m kaugusel.

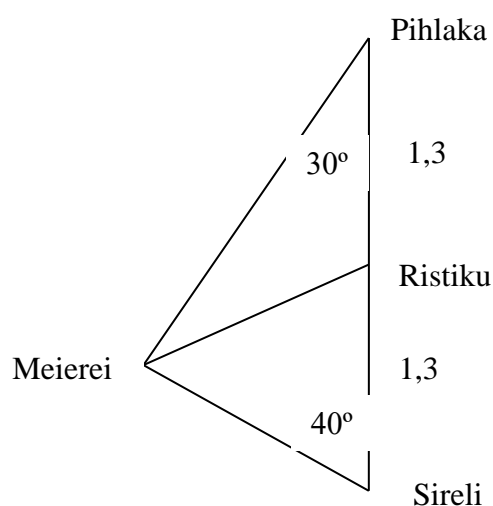
9. Ühistu lehmalaudad Sireli (S), Ristiku (R) ja Pihlaka (P) asuvad sirge tee ääres, mille juurest viivad otseteed ühistu meiereisse (M). Suure lumega ei olnud võimalik Sirelilt ja Pihlakalt otse meiereisse minna, vaid tuli liikuda läbi Ristiku. Leia lautade kaugused meiereist ning kui mitme kilomeetri võrra pikenes Sirelilt ja Pihlakalt tee meiereisse, kui on teada, et mõlemad on Ristikult ühe kaugusel. Sireli ja Pihlaka vaheline kaugus on 2,6 km, $\angle MSR = 40^\circ$, $\angle MPR = 30^\circ$. Lõppvastus anna täpsusega 0,1 km.

Kasutades siinusteoreemi leiame kaugused SM ja PM.

$$\frac{2,6}{\sin 110^\circ} = \frac{PM}{\sin 40^\circ} = \frac{SM}{\sin 30^\circ} \Rightarrow$$

$$PM = \frac{2,6 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 1,78(km)$$

$$SM = \frac{2,6 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 1,38(km)$$



Kauguse RM leidmiseks kasutame koosinusteoreemi

$$RM = \sqrt{1,3^2 + 1,38^2 - 2 \cdot 1,3 \cdot 1,38 \cdot \cos 40^\circ} \approx 0,92(km)$$

Sirelilt pikeneb tee $RS + RM - SM = 1,3 + 0,92 - 1,38 \approx 0,8(km)$.

Pihlakalt pikeneb tee $RP + RM - PM = 1,3 + 0,92 - 1,78 \approx 0,4(km)$.