

HARJUTUSÜLESANDED II osa lk. 31

1. Leia kõigi sajast väiksemate kolmega jaguvate positiivsete arvude summa. Lahendus: Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige on $a_1 = 3$ ja viimane liige $a_n = 99$. Jadas on 33 liiget. Leida tuleb selliste arvude summa S_{33} . Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{33} = \frac{3 + 99}{2} \cdot 33 = 1683$$

Vastus: Kõigi sajast väiksemate positiivsete arvude summa on 1683.

2. Rong läbis esimeses sekundis peale liikuma hakkamist 0,4 m, igas järgmises sekundis aga 0,5 m rohkem, kui eelmises. Leia rongi poolt 1,2 minutiga läbitud teepikkus.

Lahendus: Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige on $a_1 = 0,4$ ja jada vahe $d = 0,5$ ning liikmete arv $n = 1,2 \cdot 60 = 72$ (sek). Leida tuleb teepikkus, milleks osutub jada 72 esimese liikme summa S_{72} . Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$S_{72} = \frac{2 \cdot 0,4 + (72-1) \cdot 0,5}{2} \cdot 72 = 1306,8(m)$$

Vastus: Rongi poolt 1,2 minutiga läbitud teepikkus on 1306,8 meetrit.

3. Aritmeetilise jada neljas liige on 3 ja esimese kuue liikme summa on 17. Leia jada 6 esimest liiget.

Lahendus: Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus neljas liige on $a_4 = 3$ ja kuue esimese liikme summa $S_6 = 17$ ning jada liikmete arv $n = 6$. Leida tuleb jada kuus esimest liiget. Koostame võrrandisüsteemi kasutades summa

valemit $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ ja jada üldliikme valemit $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

$$\begin{cases} 3 = a_1 + 3d \\ 17 = \frac{a_1 + a_1 + 5d}{2} \cdot 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a_1 + 3d \\ 17 = 6a_1 + 15d \end{cases} \Rightarrow d = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad a_1 = 2.$$

Vastus: Selle jada kuus esimest liiget on $2; 2\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}; 3; 3\frac{1}{3}; 3\frac{2}{3}$.

4. Arvud, mis väljendavad risttahuka laiust, pikkust ja kõrgust, moodustavad geomeetrilise jada. Leia risttahuka mõõtmed, kui tema ruumala on 64 cm^3 ja diagonaal $2\sqrt{21} \text{ cm}$.

Lahendus: Olgu risttahuka mõõtmed geomeetrilise jada elemendid a_1, a_2 ja a_3 . Kasutades risttahuka ruumala valemit $V = a \cdot b \cdot c$ ja diagonaali leidmise valemit

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 84 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ 64 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \end{cases}$$

Kasutades geomeetrilise jada üldliikme valemit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ teisendame võrrandisüsteemi kujule

$$\begin{cases} 84 = a_1^2 + (a_1 \cdot q)^2 + (a_1 \cdot q^2)^2 \\ 64 = a_1^3 \cdot q^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 84 = a_1^2 + 4^2 + 4^2 \cdot q^2 \\ 4 = a_1 \cdot q \end{cases} \Rightarrow 68 = \frac{16}{q^2} + 16 \cdot q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot q^4 - 68 \cdot q^2 + 16 = 0 \Rightarrow 4 \cdot q^4 - 17 \cdot q^2 + 4 = 0 \Rightarrow q^2 = \pm 4 \text{ või } q^2 = \pm \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \pm 2 \text{ või } q = \pm \frac{1}{2}.$$

Jada tegur q ei tohi olla negatiivne, sest risttahuka mõõtmed tuleksid vastasel korral negatiivsed. Mõlemad jada tegurid $q = 2$ ja $q = 0,5$ annavad risttahuka mõõtmeteks 2 cm, 4 cm ja 8 cm.

Kontroll: Olgu risttahuka mõõtmed 2 cm, 4 cm ja 8 cm, siis on ruumala tõepoolest $V = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64 \text{ (cm}^3\text{)}$ ning risttahuka diagonaal

$$d = \sqrt{2^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{84} = 2 \cdot \sqrt{21} \text{ (cm)}.$$

Vastus: Risttahuka mõõtmed on 2 cm, 4 cm ja 8 cm.

5. Geomeetrilise jada tegur on 3 ja viie esimese liikme summa on 242. Leia selle jada kolmas liige.

Lahendus: Tegemist on geomeetrilise jadaga, kus jada tegur on $q = 3$ ja viie esimese liikme summa $S_5 = 242$. Leida tuleb kolmas liige a_3 . Kasutame geomeetrilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

$$242 = \frac{a_1 \cdot (1 - 3^5)}{1 - 3} \Rightarrow 242 = \frac{a_1 \cdot (-242)}{-2} \Rightarrow a_1 = 2 \text{ ja } a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$$

Vastus: Selle jada kolmas liige on 18.

6. RE1997 (15p.) Vabal langemisel läbib keha esimeses sekundis 4,9 m ja igas järgnevas sekundis 9,8 m rohkem kui eelmises. Leia aeg, mis kulub kehal maapinnale langemiseks 4410 m kõrguselt.

Lahendus: Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige $a_1 = 4,9$ ja jada vahe $d = 9,8$ ning jada summa $S_n = 4410$. Leida tuleb aeg, mis osutub jada liikmete arvuks n . Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$4410 = \frac{2 \cdot 4,9 + (n-1) \cdot 9,8}{2} \cdot n \Rightarrow 8820 = 9,8n + 9,8n^2 - 9,8n \Rightarrow 9,8n^2 = 8820 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 = 900 \Rightarrow n^2 = \pm 30$$

Negatiivne lahend on mõistagi antud kontekstis võõrlahend.

Vastus: Aeg, mis kulub kehal maapinnale langemiseks on 30 sekundit.

7. RE1998 (10p.) Puuraugu tegemisel maksti esimese meetri puurimise eest 300 krooni ja iga järgmise meetri eest 200 krooni rohkem kui eelmise eest. Koos preemiaga, mis oli 2000 krooni, maksti puuraugu tegemise eest 11900 krooni. Leia puuraugu sügavus.

Lahendus: Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige on $a_1 = 300$ ja jada vahe $d = 200$ ning jada summa $S_n = 11900 - 2000 = 9900$. Leida puuraugu

sügavus, mis osutub jada liikmete arvuks n . Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$
$$9900 = \frac{2 \cdot 300 + (n-1) \cdot 200}{2} \cdot n \Rightarrow n^2 + 2n - 99 = 0 \Rightarrow n_1 = 9 \text{ ja } n_2 = -11 (\text{võõrlahend})$$

Vastus: Puuraugu sügavus on 9 meetrit.

8. RE1999 (15p.) Tööpink maksab uuena 40000 krooni ja tema väärtus väheneb iga-aastaga 5% võrra aasta alguses olnud väärtusest.

a) Kui suur on selle tööpingi väärtus 4 aasta pärast?

Lahendus: Ülesande võib lahendada ka, kui geomeetrilise jada ülesande, kus esimene liige on $a_1 = 40000$ ja jada tegur $q = 1 - 0,05 = 0,95$. Leida tuleb selle jada viies liige (4 aasta pärast) a_5 .

Kasutame geomeetrilise jada üldliikme valemit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$$a_5 = 40000 \cdot 0,95^{5-1} = 32580,25 \approx 33000$$

Vastus: Tööpingi väärtus 4 aasta pärast on ligikaudu 33000 krooni.

b) Mitme aasta pärast on tööpingi väärtus tema esialgsest väärtusest kaks korda väiksem?

Lahendus: Kasutame siingi geomeetrilise jada üldliikme valemit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$$20000 = 40000 \cdot 0,95^{n-1} \Rightarrow 0,95^{n-1} = 0,5 \Rightarrow (n-1) \log 0,95 = \log 0,5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = \frac{\log 0,5}{\log 0,95} + 1 \approx 14,513 \approx 14$$

Vastus: Ligikaudu 14 aasta pärast on tööpingi väärtus tema esialgsest väärtusest kaks korda väiksem.

9. RE2000 (15p.) Vaatleme kõiki kolmekohalisi arve, mis jagamisel neljaga annavad jäägi üks.

a) Kirjuta kolm esimest ja kolm viimast sellist arvu.

Lahendus: Kuna tegemist on aritmeetilise jadaga, kus jada vahe on $d = 4$, siis kolm esimest arvu on 101, 105, 109 ja kolm viimast arvu 989, 993, 997.

Vastus: Need arvud on 101, 105, 109 ja 989, 993, 997.

b) Leia kõikide selliste arvude summa.

Lahendus: Jada liikmete arvu saame aritmeetilise jada üldliikme valemist

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$997 = 101 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow 900 = 4n \Rightarrow n = 225$$

Summa leidmiseks kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{101 + 997}{2} \cdot 225 = 123525$$

Vastus: Selliste arvude summa on 123525.

c) Leia kõikide kolmekohaliste arvude summa.

Lahendus: Kolmekohalisi arve on 900.

$$S_{900} = \frac{100 + 999}{2} \cdot 900 = 494550$$

Vastus: Kõikide kolmekohaliste arvude summa on 494550.

d) Mitu protsenti punktis b) leitud summa moodustab punktis c) leitud summast?

Lahendus: Arv 123525 moodustab arvust 494550

$$\frac{123525}{494550} \cdot 100\% \approx 24,977\% \approx 25\%$$

Vastus: Punktis b) leitud summa moodustab punktis c) leitud summast ligikaudu 25%.

10. RE2002 (15p.) Metsatükil on hinnanguliselt 15 000 tihumeetrit (tm) puitu. Raie käigus saeti maha 8% sellest kogusest.

a) Mitu tm puitu jäi pärast raiet alles?

Lahendus: Maha saeti 8% puidust. 8% 15000 – st on $0,08 \cdot 15000 = 1200$ (tm). Alles jäi $15000 - 1200 = 13800$ (tm) puitu.

b) Mitmendal aastal pärast raiet on sellel metsatükil jälle 15 000 tm puitu, kui puidu iga-aastane juurdekasv on keskmiselt 2%?

Lahenduseks võib kasutada ka geomeetrilise jada üldliikme valemit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$$15000 = 13800 \cdot 1,02^{n-1} \Rightarrow 1,02^{n-1} = \frac{25}{23} \Rightarrow (n-1) \cdot \log 1,02 = \log \frac{25}{23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log \frac{25}{23}}{\log 1,02} + 1 \approx 5,21 \approx 5$$

Vastus: Viiendal aastal pärast raiet on metsatükil jälle 15000 tm puitu.

11. RE2004 (10p.) Teibilint paksusega 0,2 mm on keritud silindrikujulisele südamikule, mille raadius on 1 cm. Teibirulli läbimõõt on 6 cm. Leidke teibilindi pikkus täpsusega 0,5 m.

Näpunäide. Lähtuge sellest, et küllalt suure täpsusega võib iga rullis oleva teibikihi ristlõike lugeda ringjooneks, kusjuures iga järgmise kihi raadius on 0,02 cm võrra suurem kui eelmisel. Seega on esimeses kihis 2π cm teipi, teises kihis $2,04\pi$ cm jne.

Lahendus: Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus kihtide arv on

$$n = \frac{2}{0,02} = 100. \text{ Jada esimene liige on } a_1 = 2 \cdot \pi r, \text{ kus } r = 1. \text{ Kuna jada teine liige}$$

$a_2 = 2,04 \cdot \pi r = 2,04\pi$, siis jada vahe on $d = 0,04\pi$. Kasutame aritmeetilise jada summa valemit

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2 \cdot 2\pi + (100-1) \cdot 0,04\pi}{2} \cdot 100 = 1249,7(\text{cm}) \approx 12,5(\text{m})$$

Vastus: Teibilindi pikkus on ligikaudu 12,5 meetrit.