ARVUTAMINE JA ALGRBRALINE TEISENDAMINE

Esmalt oleks vaja tuletada meelde järgmised valemid ja reeglid:
Tähega **N** tähistatakse **naturaalarvude hulka**, st. arvud, mida saame loendamise teel (1, 2, 3, …..). Vahel arvatakse ka arv 0 naturaalarvude hulka.
Tähega **Z** tähistatakse kõikide **täisarvude hulka** (… -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …)
Tähega **Q** tähistatakse kõikide **ratsionaalarvude hulka.**
Tähega **I** tähistatakse kõikide **irratsionaalarvude hulka (mitteperioodilised lõpmatud kümnendmurrud).**
Tähega **R** tähistatakse kõikide **reaalarvude hulka.** $R = Q \cup I$

**1) Arvu aste.**

**a)** $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ......... \cdot a}_{n \quad tegurit}, kui\ n \in N$

**b)** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

***Näide***: $x^8 \cdot x^5 = x^{13}$

**c)** $a^m : a^n = a^{m-n}$

***Näide:*** $y^9 : y^3 = y^6$

**d)** $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

***Näide:*** $x^5 \cdot y^5 = (xy)^5$

**e)** $a^n : b^n = (a : b)^n$

***Näide:*** $x^3 : y^3 = (x : y)^3$

**f)** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

***Näide:*** $(x^3)^7 = x^{21}$

**g)** $(-a)^{2n} = a^{2n}, kui\ a > 0, n \in Z$ , st. paarisarvulise astendaja korral saame positiivse tulemuse.

**h)** $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, kui\ a > 0, n \in Z$ , st. paaritu arvulise astendaja korral saame negatiivse tulemuse.

**i)** $a^0 = 1$, kui $a \neq 0$. NB! $0^n = 0$, kui $n \neq 0$

**j)** $0^0$ sellel avaldisel väärtus puudub!

**k)** $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ , kui $a \neq 0\ ja\ n \in Z$

***Näide:*** $x^{-5} = \dfrac{1}{x^5}$

**l)** $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$

***Näide:*** $\dfrac{1}{x^{-3}} = x^3$

**m)** $\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1} = a$

**n)** $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = |a|$ , st. $\begin{cases} a, kui\ a \geq 0 \\ -a, kui\ a < 0 \end{cases}$

**o)** $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

***Näide:*** $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

## 2) Korrutamise abivalemid

**a)** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**b)** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**c)** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

**d)** $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

## 3) Hulkliikme lahutamine teguriteks

**a)** Ühise teguri sulgude ette toomine

***Näide:*** $6a^2b - 12a^3b^4 + 18a^4b^3 = 6a^2b\left(1 - 2ab^3 + 3a^2b^2\right)$

**b)** Valemite kasutamine

**(1)** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

***Näide:*** $4x^2 - 9 = (2x - 3)\cdot(2x + 3)$

**(2)** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

**(3)** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

***Näide:*** $125a^3 - 8b^3 = (5a - 2b)\cdot\left(25a^2 + 10ab + 4b^2\right)$

**c)** Ruutkolmliikme lahutamine teguriteks

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, milles $x_1$ ja $x_2$ on ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid.

***Näide:*** Tegurdame ruutkolmliikme $4x^2 - 17x + 4$.

Lahendame ruutvõrrandi $4x^2 - 17x + 4 = 0$, milleks kasutame ruutvõrrandi lahendivalemit

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4\cdot 4\cdot 4}}{2\cdot 4} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}$$

$x_1 = 4$

$x_2 = 0{,}25$

Võime leida lahendid ka nii, et esmalt kontrollime kas võrrandil on üldse lahendeid, st. leiame ruutvõrrandi diskriminandi D. Avaldist $b^2$-4ac nimetatakse ruutvõrrandi diskriminandiks ning ruutvõrrandil

(1) on kaks erinevat lahendit, kui D > 0

(2) on kaks võrdset lahendit, kui D = 0

(3) lahendid puuduvad, kui D < 0.

Antud juhul D = $17^2$ - 4· 4· 4 = 225 > 0, st. on 2 erinevat lahendit ja nüüd leiame need $x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}$ ning $x_1 = 4$ *ja* $x_2 = 0{,}25$.

Saame
$4x^2 - 17x + 4 = 4(x – 4)(x-0{,}25)=(x–4)(4x-1)$.

**NÄITEÜLESANDED.**

**1)** Arvuta avaldise $\frac{5^8 \cdot 3^6}{75^5}$ väärtus kasutades astendamise omadusi.

$$\frac{5^8 \cdot 3^6}{75^5} = \frac{5^8 \cdot 3^6}{(3 \cdot 25)^5} = \frac{5^8 \cdot 3^6}{3^5 \cdot 25^5} = \frac{5^8 \cdot 3^6}{3^5 \cdot (5^2)^5} = \frac{5^8 \cdot 3^6}{3^5 \cdot 5^7} = 5^{8-7} \cdot 3^{6-5} = 5 \cdot 3 = 15$$

**2)** Lihtsusta avaldis $\left(1 + a - \frac{1}{1-a}\right) : \left(a - \frac{a^2}{a-1}\right)$

$$(1+a)^{(1-a} - \frac{1}{1-a} = \frac{(1+a)(1-a)-1}{1-a} = \frac{1-a^2-1}{1-a} = \frac{-a^2}{1-a}$$

$$a^{(a-1} - \frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2 - a - a^2}{a-1} = \frac{-a}{a-1} = \frac{a}{-(a-1)} = \frac{2}{1-a}$$

$$\frac{-a^2}{1-a} : \frac{a}{1-a} = -\frac{a^2(1-a)}{(1-a)a} = -a$$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks on –a.

**3)** Lihtsusta avaldis $\left(\frac{2}{y-4} - \frac{2y+6}{y^2-16}\right) : \frac{y+1}{y^2-3y-4}$

$$\frac{2^{(y+4}}{y-4}-\frac{2y+6}{y^2-16}=\frac{2y+8-2y-6}{(y-4)(y+4)}=\frac{2}{(y-4)(y+4)}$$

$$\frac{2}{(y-4)(y+4)}:\frac{y+1}{y^2-3y-4}=\frac{2(y-4)(y+1)}{(y-4)(y+4)(y+1)}=\frac{2}{y+4}$$

$y^2-3y-4=0$

*Viete´i teoreemist*

$y_1+y_2=3$

$y_1\cdot y_2=-4$

$y_1=-1$

$y_2=4$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks on $\frac{2}{y+4}$.

**4)** Lihtsusta avaldis $4:\frac{x^2-16}{x+4}+\frac{x^2-3x}{x^2+x-12}$ ja arvuta avaldise väärtus, kui $x=\frac{1}{3}$**.**

$$4:\frac{x^2-16}{x+4}+\frac{x^2-3x}{x^2+x-12}$$

$$4:\frac{x^2-16}{x+4}=\frac{4(x+4)}{(x+4)(x-4)}=\frac{4}{x-4}$$

$$\frac{4}{x-4}+\frac{x^2-3x}{x^2+x-12}=\frac{4}{x-4}+\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+4)}=\frac{4^{(x+4}}{x-4}+\frac{x^{(x-4}}{x+4}=$$

$$=\frac{4x+16+x^2-4x}{(x-4)(x+4)}=\frac{x^2+16}{x^2-16}$$

*Viete´i teoreemist*

$x^2+x-12=0$

$x_1+x_2=-1$

$x_1\cdot x_2=-12$

$x_1=-4$

$x_2=3$

$NB!$ *Saad tegurdada* $a^2-b^2$, *kuid* $a^2+b^2$ *ei tegurdu.*

Leiame lihtsustatud avaldise väärtuse, kui $x=\frac{1}{3}$

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2+16}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-16}=\left(\frac{1}{9}+16\right):\left(\frac{1}{9}-16\right)=16\frac{1}{9}:\left(-15\frac{8}{9}\right)=-\frac{145}{9}:\frac{143}{9}=$$

$$=-\frac{145\cdot 9}{9\cdot 143}=-\frac{145}{143}=-1\frac{2}{143}$$

Vastus: Avaldise lihtsustamise tulemuseks on $\frac{x^2+16}{x^2-16}$ ja avaldise väärtuse, kui $x=\frac{1}{3}$ on avaldise väärtuse, kui $-1\frac{2}{143}$.