KORDAMINE RIIGIEKSAMIKS X

KUJUNDI PINDALA (RUUMALA) LEIDMINE INTEGRAALI ABIL

1) Esmalt tuleta meelde olulisemad **integreerimisvalemid ja reeglid**.

$\int 0dx = C$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	$\int \sin xdx = -\cos x + C$
$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \cos xdx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

2) Summa (vahe) integraal võrdub liidetvate integraalide summaga(vahega)

$$\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3) Konstantse teguri võib tuua integraali märgi alt integraali ette.

$$\int c\, f(x)dx = c\int f(x)dx$$

4) Newton-Leibnizi valem määratud integraali arvutamiseks

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ kus } F'(x) = f(x)$$

ehk $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

5) Määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ **arvutamiseks**

a) leitakse integreeritava funktsiooni algfunktsioon;
b) leitakse algfunktsiooni väärtused ülemise ja alumise raja kohal;
c) lahutatakse algfunktsiooni väärtusest ülemise raja kohal algfunktsiooni väärtus alumise raja kohal.

6) Kui kõvertrapetsi kõverhaar on funktsiooni $y = f(x)$ graafikul ja laused on võetud kohtadel a ja b, siis selle **kõvertrapetsi pindala avaldub valemiga** $S = F(b) - F(a)$**,** kus $F'(x) = f(x)$.

7) Lisaks eelpool toodud omadustele on kasulik meeles pidada ka järgmisi omadusi:
a) Kui vahetada integraali rajad, siis muutub integraali märk vastupidiseks.

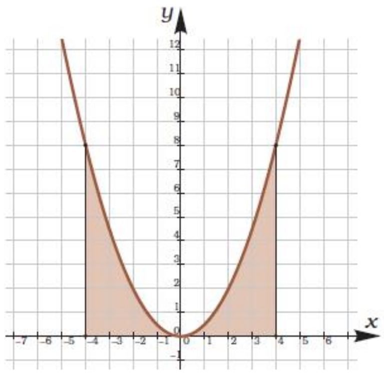
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

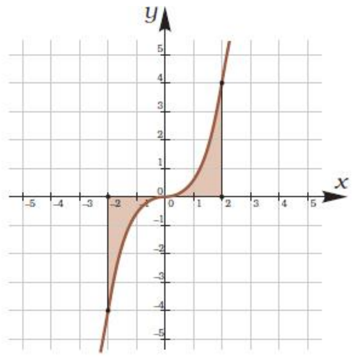
b) Kui funktsioon *f(x)* on pidev lõigul $[a;b]$, siis

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

c) Kui funktsioon *f(x)* on paarisfunktsioon, siis $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

d) Kui funktsioon *f(x)* on paaritu funktsioon, siis $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

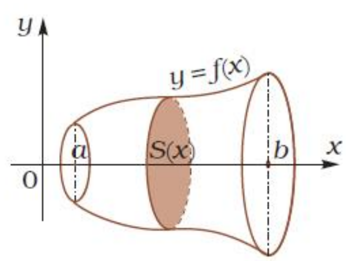




e) Kui kõvertrapets asub allpool *x*-telge, siis saad kõvertrapetsi pindalaks tema vastandarvu.

f) Kui kujundit piiravad kaks joont, siis saame otsitava pindala kahe kõvertrapetsi pindalade vahena.

8) Kui pöördkeha piiravad tasandid x=a ja x=b (a$<$b) ning pind, mis tekib lõigus $[a;b]$ integreeruva funktsiooni f(x) graafiku pöörlemisel ümber x-telje, siis avaldub **ruumala valemiga** $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.



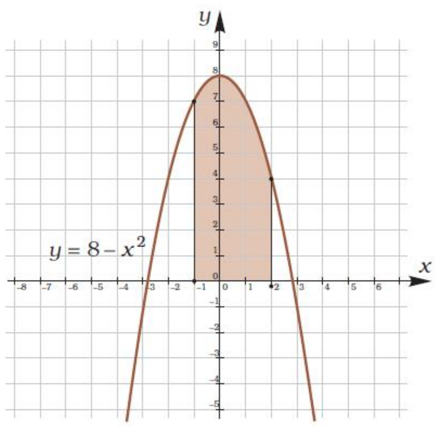
NÄITEÜLESANDED

1) Leia $\int_{-1}^{2}(8-x^2)dx$.

Integreeritava funktsiooni algfunktsioon on $8x-\frac{x^3}{3}$.

Rakendades Newton-Leibnizi valemit saame

$$\int_{-1}^{2}(8-x^2)dx=\left(8x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(8\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(8\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)-=13\frac{1}{3}-\left(-7\frac{2}{3}\right)=21$$



Kõvertrapetsi pindala on 21 ü^2.

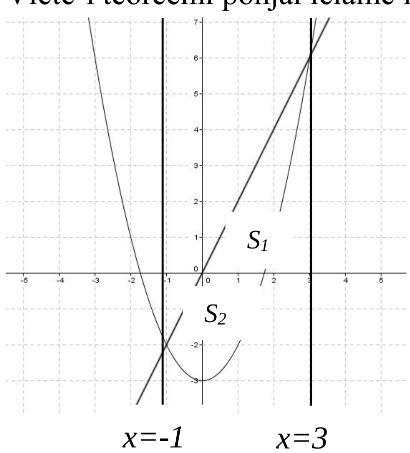
2) Leia funktsioonide $y=x^2-3$ ja $y=2x$ graafikutega piiratud kujundi pindala.

Lahendus.

Leiame esmalt graafikute lõikepunktide abstsissid (integreerimisrajad).

$\begin{cases} y=x^2-3 \\ y=2x \end{cases}$ ehk $x^2-3=2x \Rightarrow x^2-2x-3=0$.

Viete'i teoreemi põhjal leiame lahendid $x_1=-1, x_2=3$.

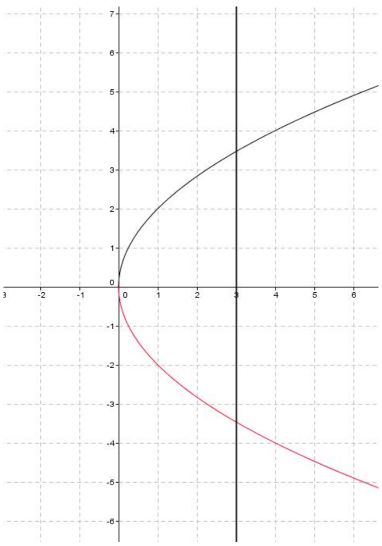


Seega

$$\int_{-1}^{3} S_1 - S_2 = \int_{-1}^{3} \left[2x - (x_2 - 3)\right]dx = \int_{-1}^{3} \left(2x - x^2 + 3\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = 9 - \frac{27}{3} + 9 - \left(1 + \frac{1}{3} - 3\right) = 10\frac{2}{3}\left(ü^2\right)$$

Vastus. Kujundi pindala on $10\frac{2}{3}$ $ü^2$.

3) Vaatame kujundit, mis tekib joone $y = 2\sqrt{x}$ pöörlemisel ümber x- telje. Tekkinud nö kausi sügavuseks on 3 üh. Leia „kausi“ ruumala.



Lahendus.

$$V = \pi\int_{0}^{3}\left(2\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_{0}^{3} 4x dx = \pi \cdot 4 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg\|_{0}^{3} = \pi \cdot 2x^2\Bigg\|_{0}^{3} = 18\pi\left(ü^3\right)$$

Vastus. Pöördkeha ruumala on 18π $ü^3$.

4) *Riigieksam 2001*Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides A(1; 1), B(3; 1), C(4;4).

a. Küljeks BC on parabooli $y = -x^2 + ax - 20$ kaar. Leia kordaja a väärtus.

b. Punktid A_1 ja C_1 on vastavalt punktide A ja C projektsioonid. Arvuta trapetsi A_1C_1CA pindala.

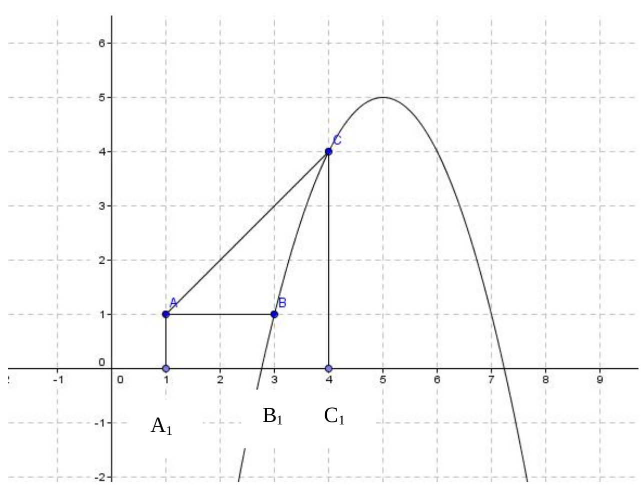
c. Arvuta kujundi ABC pindala

Lahendus.

a) Kuna punktid B ja C asuvad paraboolil, siis valides ühe nendest punktidest (näiteks C) ja pannes parabooli võrrandisse, saame

$4 = -16 + 4a - 20$

$a = 10$



b) Trapetsi A_1C_1CA alused on AA_1= 1 üh, C_1C = 4 üh ning kõrgus A_1C_1= 3 üh.

Trapetsi pindala on $S = \frac{1+4}{2} \cdot 3 = 7{,}5\left(üh^2\right)$.

c) Kujundi ABC pindala arvutamiseks lahutame trapetsi A_1C_1CA pindalast ristküliku AA_1B_1B ja kõvertrapetsi B_1C_1CB pindala.
Ristküliku AA_1B_1B pindala $S=1\cdot 2=2$ (üh^2).
Kõvertrapetsi B_1C_1CB pindala

$$S=\int_3^4\left(-x^2+10x-20\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+5x^2-20x\right)\Big|_3^4=-\frac{64}{3}+5\cdot 16-80+\frac{27}{3}-5\cdot 9+60=2\frac{2}{3}\left(üh^2\right)$$

Kujundi ABC pindala $S=7{,}5-2-2\frac{2}{3}=2\frac{5}{6}\left(üh^2\right)$.

ÜLESANDED

1) Leia kujundi pindala, mis on piiratud funktsiooni y = $-x^2+4x-4$ graafiku ja koordinaattelgedega. ***V:*** $2\frac{2}{3}$ üh²

2) Leia joontega y = 2(x-1)(3-x) ja y = $2(x-1)^2$ piiratud kujundi pindala. Tee joonis.
V: $\frac{2}{3}$ ü².

3) Leia integraalid.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x+3\cos x)dx$ *V:* 5

b) $\int\frac{2x+3x^2}{3x}$ dx *V:* $\frac{2}{3}x+\frac{x^2}{2}+c$

4) Kaardil oli märgitud pinnatükk, mida piiravad jooned $y = 3x^2 + 3x$ ja $y = x^2 + 2x + 1$. Võrdle selle pinnatüki osi, mis jäävad vastavalt ülespoole ja allapoole *x*- telge. Kumb neist on suurem ja mitmeme protsendi võrra? Skitseeri joonis. ***V:*** *ülemine ja 125%.*

5) *Riigieksam 1997.* Arvuta joontega y = $-x^2-2x+3$ ja y = -5 piiratud kujundi pindala. Tee joonis. ***V:***36ü^2.

6) *Riigieksam 1998*. On antud jooned y = sinx ja y = cosx

a) Milliste x-i väärtuste korral lõigust $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ on nende joonte puutujad paralleelsed? ***V:*** $x=-\frac{\pi}{4}$

b) Leia sirgetega x=0 ja x=$\frac{\pi}{2}$ ning antud joontega piiratud kujundi pindala.
V: $2\sqrt{2}-2$

7) *Riigieksam 1998*. Kujund on piiratud joontega y = e^x, y = 0, x = 0 ja x = ln3

a) Arvuta kujundi pindala. Tee joonis. *V:* 2üh²

b) Leia x-telje punkt a, mida läbiv vertikaalsirge poolitab antud kujundi pindala.
V: a = ln2

8) Leia pöördkeha ruumala, mis tekib, kui x-telje ümber pöörleb joontega $2x - 3y + 6 = 0$, $x = -1$, $x = 2$ ja $y = 0$ piiratud kujund. ***V:*** $V = 17\frac{2}{3}$ üh³

9) *Riigieksam 2000*. Kujund on piiratud joontega $y = -x^2$, $y = 4x + 4$ ja $y = -4x + 4$. Arvuta kujundi pindala. Tee joonis. ***V:*** $5\frac{1}{3}$ üh²

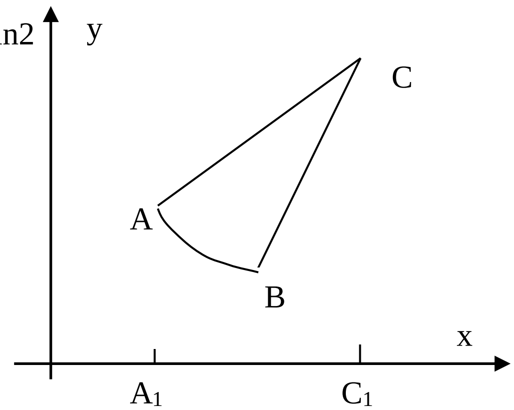
10) *Riigieksam 2000*. Kujund on piiratud joontega $y = x^2$, $y = 4x - 4$ ja $y = -4x - 4$. Arvuta kujundi pindala. Tee joonis. ***V:*** $5\frac{1}{3}$ üh²

11) *Riigieksam 2001*. Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides A(0,5; 2), B(1; 1), C(3,3).

a) Küljeks AB on hüperbooli $xy = a$ kaar, Leia kordaja a väärtus.

b) Punktid A_1 ja C_1 on vastavalt punktide A ja C projektsioonid. Arvuta trapetsi A_1C_1CA pindala.

c) Arvuta kujundi ABC pindala ***V:*** a = 1; 6,25; 2,25 – ln2



12) *Riigieksam 2001*. Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides A(1; 1), B(2; 0,5), C(3,3).

a) Küljeks AB on hüperbooli $xy = a$ kaar, Leia kordaja a väärtus.

b) Punktid A_1 ja C_1 on vastavalt punktide A ja C projektsioonid. Arvuta trapetsi A_1C_1CA pindala.

c) Arvuta kujundi ABC pindala ***V:*** a = 1; 4; 2,25 – ln2

13) *Riigieksam 2014* Joonisel on funktsioonide $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ ja $g(x) = 5-x$ graafikud.

a) Viiruta antud joontega piiratud kujund.

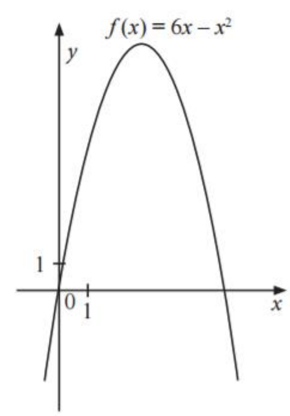
b) Arvuta selle viirautatud kujundi pindala. ***V:*** 4,5 ü²

14) *Riigieksam 2016* Joonisel on ruutfunktsiooni $f(x) = 6x - x^2$ graafik.

1. Arvutage selle ruutfunktsiooni nullkohad ja graafiku haripunkti koordinaadid.

2. Viirutage kujund, mida piiravad antud funktsiooni graafik ja x-telg ning arvutage selle kujundi pindala.

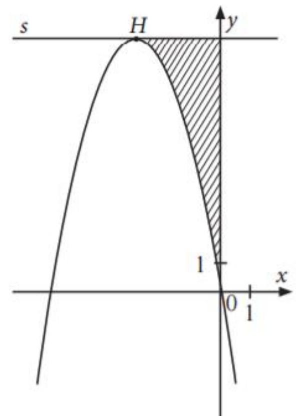
V: $X_0 = \{0;6\}; H(3;9); 36\,ü^2$.



15) *Riigieksam 2016* Joonisel on ruutfunktsiooni f (x) = $ax^2 + bx$ graafik ja x-teljega paralleelne sirge s, mis läbib funktsiooni f (x) graafiku haripunkti H(–3; 9).

1. Arvutage kordajate a ja b väärtused ning leidke sirge s võrrand.
2. Arvutage viirutatud kujundi pindala.

V: $f(x) = -x^2 - 6x; y = 9; 9\, ü^2$.



16) *Riigieksam 2017L*

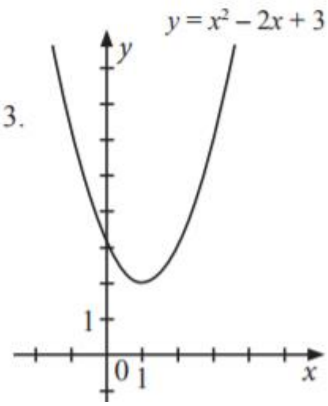
1. Kõvertrapetsit K piiravad jooned $y = x^2 - 4x + 6$; y = 1; x = 1 ja x = 4. Joonestage ja viirutage kõvertrapets K.
2. Arvutage kõvertrapetsi K pindala. *V: 6ü²*

17) *Riigieksam 2017K V: 9ü²; saab*

Ülesanne 3. (10 punkti)

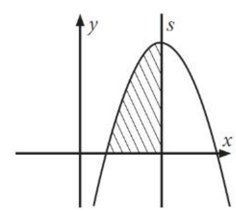
Joonisel on ruutfunktsiooni $y = x^2 - 2x + 3$ graafik.
Kõvertrapetsit K piiravad jooned $y = x^2 - 2x + 3$; $y = 0$; $x = 0$ ja $x = 3$.

1. Joonestage ja viirutage kõvertrapets K.
2. Arvutage kõvertrapetsi K pindala.
3. Kas kõvertrapetsist K saab välja lõigata ristküliku, mille pindala on 6 pindalaühikut? Põhjendage oma vastust.



18) *Riigieksam 2018K* Joonisel on ruutfunktsiooni $y = 6x - x^2 - 5$ graafik ja y-teljega paralleelne sirge s, mis läbib parabooli haripunkti.

1. Koostage sirge s võrrand.
2. Arvutage viirutatud kujundi pindala. *V:* $x = 3; 5\frac{1}{3}\, ü^2$



19) *Riigieksam 2018L* Joonisel on sirge $y = x$ ja parabool $y = x^2 - 4x + 4$.

Arvutage joonisel viirutatud kujundi pindala. *V:* $\frac{5}{6}\, ü^2$