ARVUTAMINE JA ALGRBRALINE TEISENDAMINE

Tähega **N** tähistatakse **naturaalarvude hulka**, st. arvud, mida saame loendamise teel (1, 2, 3, …..). Vahel arvatakse ka arv 0 naturaalarvude hulka.
Tähega **Z** tähistatakse kõikide **täisarvude hulka** (… -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …)
Tähega **Q** tähistatakse kõikide **ratsionaalarvude hulka.**
Tähega **I** tähistatakse kõikide **irratsionaalarvude hulka (mitteperioodilised lõpmatud kümnendmurrud).**
Tähega **R** tähistatakse kõikide **reaalarvude hulka.** $R = Q \cup I$

1) Arvu aste.

a) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n \quad tegurit}, kui\ n \in N$

b) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Näide: $x^8 \cdot x^5 = x^{13}$

c) $a^m : a^n = a^{m-n}$

Näide: $y^9 : y^3 = y^6$

d) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Näide: $x^5 \cdot y^5 = (xy)^5$

e) $a^n : b^n = (a : b)^n$

Näide: $x^3 : y^3 = (x : y)^3$

f) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Näide: $(x^3)^7 = x^{21}$

g) $(-a)^{2n} = a^{2n}, kui\ a > 0, n \in Z$, st. paarisarvulise astendaja korral saame positiivse tulemuse.

h) $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, kui\ a > 0, n \in Z$, st. paaritu arvulise astendaja korral saame negatiivse tulemuse.

i) $a^0 = 1$, kui $a \neq 0$. NB! $0^n = 0$, kui $n \neq 0$

j) 0^0 sellel avaldisel väärtus puudub!

k) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, kui $a \neq 0\ ja\ n \in Z$

Näide: $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$

l) $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Näide: $\frac{1}{x^{-3}} = x^3$

m) $\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1} = a$

n) $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = |a|$, st. $\begin{cases} a, kui\ a \geq 0 \\ -a, kui\ a < 0 \end{cases}$

o) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Näide: $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

p) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Näide: $\sqrt[5]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y}}$

q) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Näide: $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = \sqrt[3]{x^2}$

2) Korrutamise abivalemid

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

d) $(a – b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

3) Hulkliikme lahutamine teguriteks

a) Ühise teguri sulgude ette toomine

Näide: $6a^2b - 12a^3b^4 + 18a^4b^3 = 6a^2b\left(1 - 2ab^3 + 3a^2b^2\right)$

b) Valemite kasutamine

(1) $a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)$

Näide: $4x^2 - 9 = (2x - 3)\cdot(2x + 3)$

(2) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(3) $a^3 – b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Näide: $125a^3 - 8b^3 = (5a - 2b)\cdot\left(25a^2 + 10ab + 4b^2\right)$

(4) $a – b = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$

c) Ruutkolmliikme lahutamine teguriteks

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) (x - x_2)$, milles x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid.

Näide: Tegurdame ruutkolmliikme $4x^2 - 17x + 4$.

Lahendame ruutvõrrandi $4x^2 - 17x + 4 = 0$, milleks kasutame ruutvõrrandi lahendivalemit

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}$$

$x_1 = 4$

$x_2 = 0{,}25$

Võime leida lahendid ka nii, et esmalt kontrollime kas võrrandil on üldse lahendeid, st. leiame ruutvõrrandi diskriminandi D. Avaldist b^2-4ac nimetatakse ruutvõrrandi diskriminandiks ning ruutvõrrandil

(1) on kaks erinevat lahendit, kui D > 0
(2) on kaks võrdset lahendit, kui D = 0
(3) lahendid puuduvad, kui D < 0.

Antud juhul D = 17^2 - 4· 4· 4 = 225 > 0, st. on 2 erinevat lahendit ja nüüd leiame need $x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}$ ning $x_1 = 4 \ ja\ x_2 = 0{,}25$.

Saame

$4x^2$ - 17x + 4 = 4(x – 4) (x-0,25)=(x–4)(4x-1).

Põhikooli eksami ülesannete näidislahendused.
Avaldised ja võrrandid.

2015 Lihtsusta avaldis $(3+2a)(2a-3)+b(b-a)-(b-2a)^2$ ja arvuta selle väärtus, kui $a = \frac{1}{3}$ ja $b = -6$.

Lahendus.

$(3+2a)(2a-3)+b(b-a)-(b-2a)^2 = 4a^2 - 9 + b^2 - ab - (b^2 - 4ab + 4b^2) =$

$= \cancel{4a^2} - 9 + \cancel{b^2} - ab \cancel{-b^2} + 4ab - \cancel{4a^2} = 3ab - 9$

Kui $a = \frac{1}{3}$ ja $b = -6$, siis $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-6) - 9 = -6 - 9 = -15$.

Vastus. Lihtsustamise tulemuseks sain $3ab - 9$ ja väärtuseks -15.

2016

a) Lihtsusta avaldis $\frac{a}{a-b} - \frac{b^2 + a^2}{(a+b)(a-b)}$.

b) Korruta punktis a) saadud tulemus murruga $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{b^3}$ ja lihtsusta.

c) Arvuta punktis b) saadud avaldise täpne väärtus, kui a=2 ja b=-3.

Lahendus.

a) $\frac{a^{\ a+b}}{a-b} - \frac{b^2 + a^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a^2 + ab - b^2 - a^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{ab - b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{b\cancel{(a-b)}}{(a+b)\cancel{(a-b)}} = \frac{b}{a+b}$

$a+$

b) $\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2}{b^3}=\frac{\cancel{b}\cdot\cancel{(a+b)}^2}{\cancel{(a+b)}\underset{b}{\cancel{b^3}}}=\frac{a+b}{b^2}$

c) Kui a=2 ja b=-3, siis $\frac{2-3}{(-3)^2}=-\frac{1}{9}$

Vastus. Avaldise lihtsustamise tulemuseks sain $\frac{a+b}{b^2}$ ja väärtuseks $-\frac{1}{9}$.

2011 Lahenda võrrand $(x-3)^2 = 12 + x - 5x^2$ ja märgi leitud lahendid arvteljele.

$x^2-6x+9=12+x-5x^2$

$x^2-6x+9-12-x+5x^2=0$

$6x^2-7x-3=0$

$D=(-7)^2-4\cdot6\cdot(-3)=49+72=121$

$x=\frac{7\pm11}{12}\quad x_1=\frac{7+11}{12}=\frac{18}{12}=1{,}5\quad x_2=\frac{7-11}{12}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$

Kontroll.

I vp $(1{,}5-3)^2=(-1{,}5)^2=2{,}25$ pp

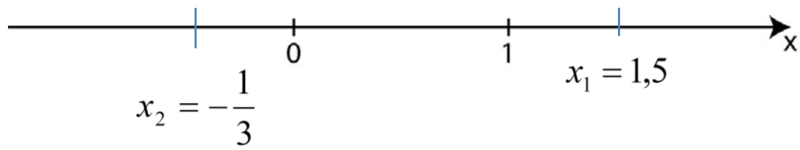
$12+1{,}5-5\cdot1{,}5^2=13{,}5-5\cdot2{,}25=13{,}5-11{,}25=2{,}25$ vp=pp

II vp $(-\frac{1}{3}-3)^2=(-3\frac{1}{3})^2=\left(-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{100}{9}=11\frac{1}{9}$

pp $12+(-\frac{1}{3})-5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=11\frac{2}{3}-5\cdot\frac{1}{9}=11\frac{2}{3}-\frac{5}{9}=11\frac{1}{9}$ vp=pp

Lahendid on $x_1=1{,}5$ ja $x_2=-\frac{1}{3}$.

Kannan lahendid arvteljele



2013 Lahenda võrrandisüsteem ja kontrollli kirjalikult lahendi õigsust.

$\begin{cases}2(x-0{,}5y)-y=6\\3x+y=5\end{cases}$ *V:* $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

Lahendus.

$2x-y-y=6$

$2x-2y=6\,|:2$

$x-y=3$

$\begin{cases}x-y=3\\3x+y=5\end{cases}$

Kasutan lahenduseks asendusvõtet.

$y = 5 - 3x$

$x - (5 - 3x) = 3$

$x - 5 + 3x = 3$

$4x = 8 \,|\, : 4$

$x = 2$

$y = 5 - 3 \cdot 2 = 5 - 6 = -1$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Kontroll.

I $2(2 - 0{,}5 \cdot (-1)) - (-1) = 2(2 + 0{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 + 1 = 5 + 1 = 6$ vp=pp

II $3 \cdot 2 + (-1) = 6 - 1 = 5$ vp=pp

Lahend

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$