VÕRRANDID.

1) **Lineaarvõrrandi normaalkuju on *ax + b = 0***, kus *ax* on lineaarliige ja *b* vabaliige. Lineaarvõrrandil

a) puuduvad lahendid, kui $a = 0$ ja $b \neq 0$

b) on lahendeid lõpmatult palju, kui $a = 0$ ja $b = 0$

c) üks lahend, kui $a \neq 0$ ja see avaldub kujul $x = -\frac{b}{a}$.

2) **Ruutvõrrandi normaalkuju on $ax^2 + bx + c = 0$**, kus *a* on ruutliikme kordaja, *b* lineaarliikme kordaja ning *c* vabaliige.

a) Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendivalem

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

b) Avaldist b^2-$4ac$ nimetatakse ruutvõrrandi diskriminandiks (tähistame *D*) ning ruutvõrrandil

(1) on kaks erinevat lahendit, kui $D > 0$

(2) on kaks võrdset lahendit, kui $D = 0$

(3) lahendid puuduvad, kui $D < 0$

c) Taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendamiseks kasutatakse

(4) Viete`i valemeid: $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 \cdot x_2 = q$

(5) või lahendivalemit $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

3) **Kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemil** $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

a) on üks lahend, kui $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;

b) on lõpmatult palju lahendeid, kui $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

c) pole lahendeid, kui $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Lineaarvõrrandisüsteeme lahendatakse

1. liitmisvõttega (võrrandeid teisendatakse nii, et ühe muutuja kordajad oleksid teineteise vastandarvud);
2. asendusvõttega (ühest võrrandist avaldatakse üks muutuja ja asendatakse see teise võrrandisse).
3. lineaarseid võrrandisüsteeme võib lahendada ka graafiliselt või determinantide abil.

NÄITEÜLESANDED.

1) Lahenda võrrandisüsteem ja kontrolli lahendeid.

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0 \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$$

Lahendus.

Lahendame antud võrrandisüsteemi asendusvõttega.

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0 \\ 3x-y-1=0 \Rightarrow y=3x-1 \end{cases}$$

$$x^2+(3x-1)^2+2(3x-1)-9=0$$

$$x^2+9x^2-6x+1+6x-2-9=0$$

$$10x^2-10=0 \,|:10$$

$$x^2=1 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$$

Leiame tundmatu y:

$$y_1=3-1=2, y_2=-3-1=-4$$

Lahendid on $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-4 \end{cases}$

Kontroll.

Kontrollime lahendeid esimese algvõrrandi jaoks.

Kui lahendiks on $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}$, siis $v_1=1^2+2^2+2\cdot 2-9=1+4+4-9=0$ $v_1=p_1$

Kui lahendiks on $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-4 \end{cases}$, siis $v_1=(-1)^2+(-4)^2+2\cdot(-4)-9=1+16-8-9=0$

$v_1=p_1$

Kontrollime lahendeid teise võrrandiga.

Kui lahendiks on $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}$, siis $v_2=3\cdot 1-2-1=3-2-1=0$ $v_2=p_2$

Kui lahendiks on $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-4 \end{cases}$, siis $v_2=3\cdot(-1)-(-4)-1=-3+4-1=0$ $v_2=p_2$

Vastus. Võrrandisüsteemi lahendid on $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-4 \end{cases}$.

2) *(T. Lepmann, A.Telgmaa, A. Undusk, K. Velsker Matemaatika IX klassile)* **Hariliku murru nimetaja on lugejast ühe võrra suurem. Kui murru lugejat suurendada 8 korda ja nimetajat 3 võrra, siis saadakse murd, mille korrutis esialgse murruga on 1.**

Lahendus.

Olgu esialgse murru lugeja *x* ja nimetaja *x +1*, seega harilik murd avaldub kujul $\frac{x}{x+1}$.

Uue murru lugeja on 8x ja nimetaja x + 2, seega uus murd on $\frac{8x}{x+3}$. Murdude korrutis on

$$\frac{8x}{x+3}\cdot\frac{x}{x+1}=1.$$

$$\frac{8x^2}{(x+3)(x+1)}-1=0 \Rightarrow \frac{8x^2}{(x+3)(x+1)}-1=0 \Rightarrow \frac{8x^2-1(x+3)(x+1)}{(x+3)(x+1)}=0$$

$$\frac{8x^2-x^2-4x-3}{(x+3)(x+1)}=0$$

$$\begin{cases}7x^2-4x-3=0\\(x+3)(x+1)\neq 0\end{cases}$$

$$7x^2-4x-3=0$$

$$D=16+84=100$$

$$x=\frac{4\pm 10}{14} \quad x_1=1$$

$x_2=-\frac{3}{7}$ ei sobi, kuna murru lugeja peab olema nullist erinev täisarv.

Kontroll. Olgu esialgse murru lugeja 1 ja nimetaja 2, siis saame murru $\frac{1}{2}$. Uue murru lugeja on $8\cdot 1 = 8$ ja nimetaja 1 + 3 = 4 ning saame murru $\frac{8}{4}$. Murdude korrutis

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{4}=\frac{1\cdot 8}{2\cdot 4}=1.$$

Vastus. See murd on $\frac{1}{2}$.

3) Leida kahekohaline arv, kui ta korrutis oma numbrite summaga on 144 ja üheliste number on kahe võrra suurem kümneliste numbrist.

Lahendus.

Olgu kümnelisi x, siis ühelisi on $x+2$ ja kahekohaline arv on $10x+x+2=11x+2$. Numbrite summa on $x+x+2=2x+2=2(x+1)$.

Koostame võrrandi: $(11x+2)\cdot 2(x+1)=144$

Lahendame saadud võrrandi:

$$(11x+2)\cdot 2(x+1)=144 \,|:2$$

$$11x^2+11x+2x+2-72=0$$

$$11x^2+13x-70=0$$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{169+3080}}{22}=\frac{-13\pm 57}{22},\ x_1=2,\ (x_2=-\frac{35}{11}\text{ ei sobi})$$

Kontroll. Kümneliste number on 2 ja üheliste number 4. Saame arvu 24. Korrutame arvu tema numbrite summaga (2 + 4 = 6). Saame $24\cdot 6 = 144$.

Vastus. See arv on 24.

4) *Riigieksam 2002 (15p.)* **Kaks teed ristuvad täisnurga all. Esimesel teel liigub ristmiku poole veoauto kiirusega 40 km/h ja teisel teel liigub ristmiku poole sõiduauto 50 km/h. Teades, et antud hetkel on veoauto ristmikust 2 km ja sõiduauto 3 km kaugusel. Leidke mitmendal minutil on autod esimest korda teineteisest 1 km kaugusel.**

Lahendus.

Veoauto kiiruseks on $40\frac{km}{h}=\frac{40}{60}\frac{km}{\min}=\frac{2}{3}\frac{km}{\min}$.

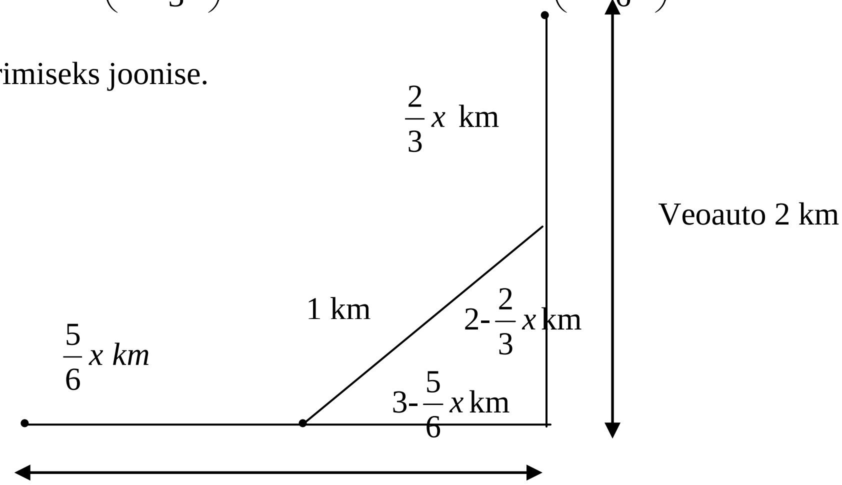
Sõiduauto kiiruseks on $50\frac{km}{h}=\frac{50}{60}\frac{km}{\min}=\frac{5}{6}\frac{km}{\min}$.

Sõidukit olgu teineteisest esimest korda 1 kilomeetri kaugusel x minuti pärast.

Veoauto läbib x minutiga $\frac{2}{3}x$ kilomeetrit ja sõiduauto $\frac{5}{6}x$ kilomeetrit.

Veoauto kaugus on ristmikust siis $\left(2-\frac{2}{3}x\right)$ kilomeetrit ja sõiduautol $\left(3-\frac{5}{6}x\right)$ kilomeetrit.

Teeme lahenduse illustreerimiseks joonise.



Võrrandi koostamiseks kasutame Pythagorase teoreemi:

$$\left(2-\frac{2}{3}x\right)^2+\left(3-\frac{5}{6}x\right)^2=1$$

$$4-\frac{8}{3}x+\frac{4}{9}x^2+9-5x+\frac{25}{36}x^2-1=0$$

$$12-\frac{23}{3}x+\frac{41}{36}x^2=0\,\Big|\cdot 36$$

$$41x^2-276x+432=0$$

$$x=\frac{276\pm\sqrt{76176-70848}}{82}=\frac{276\pm 73}{82}$$

$x_1\approx 2{,}5$

$x_2\approx 4{,}3$

x_2 ei sobi, kuna ülesandes on küsitud, millal autod esimest korda olid 1 km kaugusel.

Lahendit $x_1\approx 2{,}5$ kontrollige iseseisvalt.

Vastus. Autod on teineteisest 1 km kaugusel kolmandal minutil.